BULLETIN
DE
L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

SÉRIE DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

Volume VIII Numéro 3

VARSOVIE 1960

Le Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences est publié en Séries.

La présente Série comprend des communications du domaine de la mathématique, astronomie et physique

Lesdites sciences sont du domaine de la Troisième Classe de l'Académie Polonaise des Sciences.

La présente Série paraît mensuellement.

Les communications destinées à être publiées dans le Bulletin sont présentées à la Rédaction du Bulletin par les membres de l'Académie.

Adresse de la Rédaction: Pałac Kultury i Nauki, Varsovie

BULLETIN
DE
L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Rédacteur en chef
K. KURATOWSKI

Rédacteur en chef suppléant
L. INFELD

SÉRIE DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

Rédacteur de la Série
A. MOSTOWSKI

Comité de Rédaction de la Série
K. BORSUK, W. IWANOWSKA, A. JABŁOŃSKI, W. RUBINOWICZ

VOLUME VIII
NUMERO 3

VARSOVIE 1960

PRINTED IN POLAND

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE, W-WA. MIODOWA 10

Nakład 1013+152 egz.	*Rękopis dostarczono 4.II.1960*
Ark. wyd. 5,5, ark. druk. 5+0,5 wkł.	*Podpisano do druku 20.V.1960*
Papier druk. sat. 80 g kl. III	*Druk ukończono w maju 1960*
Format B5, 70×100 cm	*Zam. prod. 58/60 Cena zł 20.—*

WARSZAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA, W-WA, ŚNIADECKICH 8

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 3, 1960

MATHEMATICS

Partitions into Unequal Primes

by

A. MĄKOWSKI

Presented by W. SIERPIŃSKI on January 4, 1960

H. E. Richert has proved [2] the following theorem:

Let $m_1, m_2, m_3, \ldots$ be an infinite increasing sequence of positive integers. If there exists a positive integer k such that for $i > k$ the inequality $m_{i+1} \leqslant 2m_i$ holds and there exists an integer $a \geqslant 0$ such that the numbers $a+1$, $a+2, \ldots, a+s$, where $s \geqslant m_{k+1}$, are sums of different terms of the sequence $m_1, m_2, \ldots, m_k$, then every integer $> a$ is a sum of different terms of the sequence $m_1, m_2, m_3, \ldots$.

From this theorem he has deduced that every integer > 6 is representable as a sum of unequal primes (cf. [2], [3]).

Below we give four theorems which sharpen this result.

THEOREM 1. *Every integer* > 55 *is a sum of unequal primes of the form* $4k-1$.

THEOREM 2. *Every integer* > 121 *is a sum of unequal primes of the form* $4k+1$.

THEOREM 3. *Every integer* > 161 *is a sum of unequal primes of the form* $6k-1$.

THEOREM 4. *Every integer* > 205 *is a sum of unequal primes of the form* $6k+1$.

Proofs of these theorems rest upon the theorem of Richert quoted above and upon the following theorem of R. Breusch [1]:

If $x \geqslant 7$, then between x and $2x$ there is at least one prime of each of the following forms: $4k-1$, $4k+1$, $6k-1$, $6k+1$.

In the proof of Theorem 1 we put $a = 55$, $m_k = 79$ and $s = m_{k+1} = 83$.

In the proof of Theorem 2 we put $a = 121$, $m_k = 109$ and $s = m_{k+1} = 113$.

In the proof of Theorem 3 we put $a = 167$, $m_k = 113$ and $s = m_{k+1} = 131$.

In the proof of Theorem 4 we put $a = 205$, $m_k = 163$ and $s = m_{k+1} = 181$.

In every one of these cases we verify that the conditions of the Richert's theorem are satisfied. In the proof of Theorem 3 we verify immediately that it is true for integers n satisfying the inequalities $162 \leqslant n \leqslant 167$. The lower bounds given in Theorems 1, 2, 3 and 4 are the best possible ones.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, WARSAW UNIVERSITY
(INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO)

REFERENCES

[1] R. Breusch, *Zur Verallgemeinerung des Bertrandschen Postulates, dass zwischen x und $2x$ stets Primzahlen liegen*, Math. Zeitschr., **34** (1932), 505—526.

[2] H. E. Richert, *Über Zerlegungen in paarweise verschiedene Zahlen*, Norsk Matematisk Tidsskrift, **31** (1949), 120—122.

[3] — , *Über Zerfällungen in ungleiche Primzahlen*, Math. Zeitschr., **52** (1950), 342—343.

БЮЛЛЕТЕНЬ
ПОЛЬСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
Серия мат., астр. и физ. наук
Том VIII, № 3, 1960

МАТЕМАТИКА

В. ПОНОМАРЕВ

АКСИОМЫ СЧЕТНОСТИ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Представлено П. С. АЛЕКСАНДРОВЫМ 15 января 1960

В настоящей работе, прежде всего, исследуется, какие топологические пространства являются образами метрических пространств при открытых непрерывных отображениях (§ 1). При этом нас особенно интересуют так называемые S-отображения *), т. е. такие отображения f пространства X на пространство Y, при которых прообраз $f^{-1}y$ каждой точки $y \in Y$ есть подпространство пространства X, имеющее счетную базу (удовлетворяющее 2-ой аксиоме счетности Хаусдорфа). Доказывается следующая

ТЕОРЕМА 1. *Среди всех T_0-пространств X открытыми непрерывными образами метрических пространств являются все пространства с 1-ой аксиомой счетности и только они. Для того, чтобы T_0-пространство X было образом метрического пространства при открытом S-отображении, необходимо и достаточно, чтобы в пространстве X существовала точечно-счетная база* **). *При этом метрическое пространство, образом которого является данное пространство X, в обоих случаях может быть предположено нульмерным и имеющим тот же вес, что и пространство X.*

В § 2 доказывается, что свойство топологического пространства иметь точечно-счетную базу (являющееся, очевидно, некоторым усилением 1-ой аксиомы счетности) сохраняется при всех замкнутых непрерывных отображениях $f : X \to Y$, при которых границы прообразов суть бикомпакты, содержащие счетные всюду плотные множества ***).

Наконец, § 3 посвящен некоторым вопросам, касающимся метризуемости топологических пространств и ее сохранения при отображениях определенного типа.

*) Они впервые рассмотрены А. Стоном [3] и Ю. М. Смирновым [4].

**) Система множеств в пространстве $\mathbf{X}$ называется точечно-счетной, если каждая точка $x \in X$ содержится не более, чем в счетном числе множеств этой системы.

***) Мы увидим, что в наших предположениях эти бикомпакты автоматически окажутся метризуемыми (т. е. имеющими счетную базу).

§ 1. 1. Начнем со следующей очевидной леммы:

ЛЕММА 1. *Пусть $f: X \to Y$ однозначное отображение пространства X на пространство Y. Если для любой точки $x \in X$, некоторая база $\mathfrak{B}_x$ этой точки переходит в базу точки $y = fx$, то отображение f непрерывно и открыто. Обратно, при открытом непрерывном отображении всякая база всякой точки $x \in X$ переходит в базу точки $y = fx$.*

Из леммы сразу следует, что при открытом непрерывном отображении $f: X \to Y$ первая аксиома счетности сохраняется.

2. Бэровское пространство B_τ веса τ; бэровский оригинал (данного пространства с 1-ой аксиомой счетности) и его стандартное отображение. Пусть $\theta = \{\alpha\}$ — какое нибудь множество мощности τ, элементы которого будем называть „индексами". Рассмотрим множество счетных последовательностей $\xi = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ этих индексов; превратим его в метрическое пространство, определяя расстояние между последовательностями $\xi = \{\alpha_n\}$ и $\xi' = \{\alpha'_n\}$ по формуле $\varrho(\xi, \xi') = 1/k$, где k есть наименьшее среди таких натуральных чисел n, для которых $\alpha_n \neq \alpha'_n$. Полученное метрическое пространство и называется бэровским пространством B_τ. Сферическая окрестность $O(\xi, 1/k)$ точки $\xi = \{\alpha_n\} \in B_\tau$ состоит из всех точек $\xi' = \{\alpha'_n\}$, для которых $\alpha'_1 = \alpha_1, ..., \alpha'_k = \alpha_k$. Эти окрестности образуют стандартную базу мощности τ пространства B_τ (которое таким образом имеет вес τ); элементы этой базы естественно записывать в виде $O_{\alpha_1, ..., \alpha_k}$, где $O_{\alpha_1, ..., \alpha_k}$ есть множество всех точек $\xi' = \{\alpha'_n\}$, для которых $\alpha'_1 = \alpha_1, ..., \alpha'_k = \alpha_k$.

Пусть теперь X какое нибудь T_0-пространство с 1-ой аксиомой счетности, имеющее вес τ. Обозначим через $\mathfrak{U}$ какую нибудь базу $\{U_\alpha\}$ мощности τ пространства X. В бэровском пространстве B_τ (построенном на том же множестве индексов, что и база $\mathfrak{U}$) назовем точку $\xi = \{\alpha_n\}$ отмеченной, если $U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}, ...$ образуют базу точки $x \in X$. Множество всех отмеченных точек назовем бэровским оригиналом $W \subseteq B_\tau$ пространства X; каждой точке $\xi = \{\alpha_n\}$ множества W соответствует та — единственная —*) точка $x \in X$, для которой $\{U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}, ...\}$ является базой и которая может быть записана в виде

$$x = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_{\alpha_i} = f\xi .$$

Таким образом определенное отображение $f: W \to X$ называется *стандартным отображением* бэровского оригинала W пространства X на само это пространство. Очевидно и бэровский оригинал W и его стандартное отображение f полностью определены заданием базы $\mathfrak{U}$ пространства X. Докажем, что

$$f(W \cap O_{\alpha_1 ... \alpha_k}) = \bigcap_{i=1}^{k} U_{\alpha_i} . \tag{1}$$

*) так как X есть T_0-пространство!

Включение $f(W\cap O_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n})\subseteq\bigcap_{i=1}^{k}U_{\alpha_i}$ непосредственно следует из определения отображения f. Для доказательства обратного включения возьмем какую нибудь точку $x\in\bigcap_{i=1}^{k}U_{\alpha_i}$ и дополним окрестности $U_{\alpha_1},\ldots,U_{\alpha_k}$ какими нибудь окрестностями $U_{\alpha_{k+1}},\ldots$, (взятыми из $\mathfrak{V}$) до базы точки x в X. Тогда полагая

$$\xi=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\alpha_{k+1},\ldots)\in W \tag{2}$$

получим очевидно $\xi\in W\cap O_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$, $f\xi=x$. Из равенства (1) в силу леммы 1 следует открытость и непрерывность отображения f:

Если (2) какая нибудь точка множества W, то множества $W\cap O_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$ образуют базу этой точки, а их образы $U_{\alpha_1}\cap,\ldots,\cap U_{\alpha_k}$ образуют базу точки $x=f\xi=\bigcap_{i=x}^{\infty}U_{\alpha_i}$ в X.

Замечание. При $\tau=\aleph_0$ получаем, очевидно, новое доказательство теоремы А. Шварца [2], еще более простое, чем первоначальное доказательство самого А. Шварца.

3. Пусть X—пространство веса τ с точечно-счетной базой $\mathfrak{V}$. В базе $\mathfrak{V}$ (как и во всякой базе пространства X) содержится (см. [1], гл. I) подбаза $\mathfrak{V}_0$ мощности τ и $\mathfrak{V}_0$ (как подбаза точечно-счетной базы) также точечно-счетна. Пусть $\mathfrak{V}$ есть точечно-счетная база мощности τ. Пусть x — произвольная точка пространства X, $U_{\alpha_1^x},\ldots,U_{\alpha_n^x},\ldots$, все элементы базы $\mathfrak{V}$, содержащие точку x. Обозначим для краткости индексы $\alpha_1^x,\ldots,\alpha_n^x,\ldots$, просто через $(1),\ldots,(n),\ldots$. Тогда ясно, что в пространстве B_τ содержится в качестве подпространства обычное пространство Бэра B_0^x счетного веса, состоящее из всех последовательностей, элементы которых суть какие нибудь из индексов

$$(1)=\alpha_1^x,\ldots,(n)=\alpha_n^x,\ldots.$$

Очевидно, весь прообраз $f^{-1}x$ точки x содержится в этом подпространстве B_0^x со счетной базой. Итак, в рассматриваемом случае, открытое отображение f есть S-отображением. Остается доказать, что образ всякого метрического пространства при открытом S-отображении есть пространство с точечно-счетной базой. Но всякое метрическое пространство имеет точечно-счетную базу *), и поэтому достаточно доказать следующее предложение

Теорема 2. *При открытых S-отображениях свойство пространства иметь точечно-счетную базу сохраняется.*

Мы докажем следующее, формально более сильное предложение

*) Это, например, следует из метризационной теоремы Нагата-Смирнова [5], [6]; всякая NS-база будет непременно точечно-счетна.

Теорема 2′. *Пусть f — открытое непрерывное отображение X на Y, при котором прообраз всякой точки $y \in Y$ содержит счетное всюду плотное в $f^{-1}y$ подмножество. Тогда, если $\mathfrak{A}=\{U_\alpha\}$ есть точечно-счетная база пространства X, то $\{fU_\alpha\}$ есть точечно-счетная база в Y.*

Доказательству предпошлем еще одну простую лемму

Лемма 2. *Пусть X-пространство с точечно-счетной базой $\mathfrak{A}$ и множество A, лежащее в X, содержит счетное всюду плотное в A подмножество A_0. Тогда система $\mathfrak{A}_0$ всех $U_\alpha \in \mathfrak{A}$, пересекающихся с A, не более чем счетна.*

В самом деле, пусть $A_0=\{a_m\}$. Обозначим через σ_m не более чем счетное множество элементов U_α базы $\mathfrak{A}$, содержащих точку a_m. Так как каждое $U_\alpha \in \mathfrak{A}_0$, пересекаясь с A и будучи открытым, содержит некоторое $a_m \in A_0$, то $\mathfrak{A}_0$ совпадает со счетной системой $\bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma_m$.

Доказательство теоремы 2′. Пусть $\mathfrak{A}=\{U_\alpha\}$ — точечно-счетная база пространства X. Так как f — открыто, то $\mathfrak{B}=\{fU_\alpha\}$ есть база пространства Y. Докажем, что она точечно-счетная. Надо доказать, что всякая точка $y_0 \in Y$ содержится не более, чем в счетном числе множеств fU_α, т. е. что $f^{-1}y_0$ пересекается не более, чем со счетным числом множеств U_α. Но последнее утверждение непосредственно следует из леммы 2.

Следствие. (из леммы 2). *Всякая точечно-счетная база пространства X, содержащего счетное всюду плотное множество, является счетной.*

Замечание. Теорема 2 является в своем роде окончательной: А. Стон [3] дал пример непрерывного открытого отображения метрического (при этом нульмерного и локально-компактного пространства) на пространство всех порядковых чисел $< \omega_1$, не имеющее точечно-счетной базы; поэтому, в теореме 2 нельзя отказаться ни от одного из содержащихся в ней условий.

Заканчивая этот параграф, покажем, что из Теоремы 2 и давно известных результатов П. С. Александрова сразу вытекает одна

Теорема А. Стона ([3], теор. 4). *Пусть регулярное пространство Y есть образ метризуемого пространства X, удовлетворяющего локальной 2-ой аксиоме счетности, при открытом S-отображении. Тогда Y-метризуемое пространство (также удовлетворяющее локальной 2-ой аксиоме счетности).*

В самом деле, всякое пространство Y, являющееся открытым образом пространства с локальной 2-ой аксиомой счетности, очевидно, также удовлетворяет этой аксиоме. С другой стороны, из Теоремы 2 вытекает, что в условиях теоремы А. Стона пространство Y имеет точечно-счетную базу. Таким образом, пространство Y является локально метризуемым пространством с точечно-счетной базой, удовлет-

воряющим локальной 2-ой аксиоме счетности, а тогда в силу следствия теоремы 8′ и теоремы 9 главы 5 § 3 „Мемуара" [1], пространство Y не только метризуемо, но распадается на попарно непересекающиеся открыто-замкнутые подпространства, в каждом из которых имеется счетная база.

Этот результат А. Стона также в своем роде окончательный так как он перестает быть верным, если отказаться от требования, чтобы данное отображение было S-отображением (соответствующий пример — тот же самый, на который мы указывали в связи с Теоремой 2).

§ 2. Теорема 3. *Пусть f — замкнутое непрерывное отображение T_1-пространства X с точечно-счетной базой на T_1-пространство Y. Если для всякой точки $y \in Y$ прообраз $f^{-1}y$ есть компакт* *), то Y имеет точечно-счетную базу.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}=\{U_\alpha\}$ — точечно-счетная база пространства X. Берем произвольную точку $y \in Y$ и обозначаем через σ_y множество всех элементов базы $\mathfrak{A}$, пересекающихся с $f^{-1}y$. В силу леммы 2 множество σ_y не более, чем счетно. Из элементов системы σ_y образуем всевозможные конечные покрытия компакта $f^{-1}y$; их не более, чем счетное множество; обозначаем их через ω_k^y, $k=1, 2, \ldots$. Сумма всех элементов покрытия ω_k^y есть открытое в X множество $H_k^y \supseteq f^{-1}y$. Обозначим через $V_k^y \subseteq Y$ множество всех тех $y' \in Y$, для которых $f^{-1}y' \subseteq H_k^y$. Докажем, что система $\mathfrak{V}$ всех V_k^y есть точечно-счетная база пространства Y. Докажем сначала, что $\mathfrak{V}$ — база пространства Y. Так как отображение f замкнуто, то Y может быть отождествлено с пространством разбиения $\{f^{-1}y\}$, причем окрестность данной „точки" $(f^{-1}y_0)$ состоит из всех $f^{-1}y$, лежащих в некоторой окрестности $Of^{-1}y_0$ множества $f^{-1}y_0$ (в пространстве X). Поэтому, достаточно найти некоторое $H_k^{y_0} \subseteq Of^{-1}y_0$ для любой $Of^{-1}y_0$ и любой точки $y_0 \in Y$. Берем для каждой точки $x \in f^{-1}y_0$ некоторое $U_\alpha \in \sigma_{y_0}$ так, чтобы $x \in U_\alpha \subset Of^{-1}y_0$. Из полученного покрытия компакта $f^{-1}y_0$ выбираем конечное, которое есть некоторое $\omega_k^{y_0}$; соответствующее $H_k^{y_0}$ и есть искомое. Доказываем, что система $\mathfrak{V}$ — точечно-счетна. Надо доказать, что множество всех V_k^y, содержащих данную точку y_0 не более, чем счетно, т. е. что не более чем счетно множество тех H_k^y, для которых $f^{-1}y_0 \subseteq H_k^y$. Для этого в свою очередь достаточно доказать, что из $f^{-1}y_0 \subseteq H_k^y$ следует, что H_k^y есть некоторое $H_i^{y_0}$. Но если $f^{-1}y_0 \subseteq H_k^y$, то ω_k^y есть покрытие множества $f^{-1}y_0$, составленное из элементов базы $\mathfrak{A}$, т. е. некоторое $\omega_i^{y_0}$, что и требовалось доказать.

---

*) Теорема остается верной если потребовать, чтобы всего лишь граница множества $f^{-1}y$ для каждого $y \in Y$ была компактом.

§ 3. Как известно, первое решение общей задачи метризации топологических пространств было дано П. С. Александровым и П. С. Урысоном в работе [7]. В этой работе они ввели два понятия: полной системы покрытий и правильной вписанности одного покрытия в другое. Система покрытий $\Sigma = \{\omega_\alpha\}$ пространства X называется полной, если, какова бы ни была точка x и как бы ни был выбран в каждом покрытии ω_α элемент $\Gamma_\alpha \in \omega_\alpha$, содержащий точку x, множество этих Γ_α образует базу точки x в X. Покрытие β называется правильно вписанным в покрытие α, если сумма любых двух пересекающихся элементов покрытия β содержится в некотором элементе покрытия α. Очевидно правильная вписанность является ослаблением звездной вписанности. Метризационная теорема П. С. Александрова и П. С. Урысона в современной терминологии может быть сформулирована так:

*Для того, чтобы топологическое пространство X было метризуемо, необходимо и достаточно, чтобы оно было паракомпактом *) и имело счетную полную систему покрытий **).*

В работе [3] А. Стон строит пример открытого непрерывного отображения $f : X \to Y$ метрического X на неметризуемое Y, при котором все прообразы $f^{-1}y$ суть компакты ***). Ввиду этого результата А. Стона окончательный характер имеет

ТЕОРЕМА 4. *Паракомпакт Y, являющийся образом метризуемого пространства X при компактном открытом отображении непременно метризуем.*

Назовем непрерывное отображение метрического пространства X на топологическое пространство Y слабо равномерным, если для любой точки $y \in Y$ и любой ее окрестности Oy в Y непременно $\varrho(f^{-1}y, X \setminus f^{-1}Oy) > 0$.

Легко видеть, что компактное отображение непременно слабо равномерно, поэтому Теорема 4 содержится в следующем предположении

ТЕОРЕМА 4′. *Паракомпакт Y, являющийся образом метрического пространства X при слабо-равномерном открытом отображении f, метризуем.*

---

*) Паракомпактное хаусдорфово пространство мы называем просто паракомпактом.

**) Это утверждение легко сводится к теореме П. С. Александрова и П. С. Урысона применением известной теоремы А. Стона [8], характеризующей паракомпактность с помощью звездной вписанности покрытия β в произвольное покрытие α. Я не знаю, *существует-ли не-паракомпактное (хаусдорфово, регулярное, нормальное) пространство, в каждое покрытие которого можно правильно вписать некоторое другое покрытие.*

***) Отображения, удовлетворяющие последнему условию, называются компактными.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что в условиях этой теоремы пространство Y имеет счетную полную систему покрытий. Пусть $\gamma^i = \{U^i_\alpha\}$ есть покрытие метрического пространства, причем diam $U^i_\alpha < 1\ i$. Положим $f\gamma^i = \{fU^i_\alpha\}$, и докажем, что $\{f\gamma^i\}$ есть полная система покрытий пространства Y. Пусть для произвольной точки $y_0 \in Y$ выбрано по одному содержащему ее элементу $V_i = fU^i_\alpha$ из каждого $f\gamma^i$.

Пусть Oy_0 — произвольная окрестность точки y_0 в Y. Достаточно доказать, что при некотором i имеем $V_i \subseteq Oy_0$.

Но $\varrho(f^{-1}y_0,\ X \setminus f^{-1}Oy_0) > 0$, $y_0 \in V_i$, значит $f^{-1}y_0 \cap U^i_\alpha \neq \Lambda$ и diam $U^i_\alpha < 1/i$, поэтому для всех достаточно больших i имеем $U^i_\alpha \subseteq f^{-1}Oy_0$, значит $V_i \subseteq Oy_0$.

Я не знаю, существует ли неметризуемый паракомпакт (бикомпакт), имеющий точечно-счетную базу.

В заключение, я выражаю глубокую благодарность П. С. Александрову, под руководством которого настоящая работа была выполнена.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров и П. С. Урысон, «О компактных топологических пространствах», Труды Мат. Инст. А. Н. СССР, **31** (1950).

[2] А. Т. Шварц, «К одной задаче Сикорского», Усп. мат. наук **12** (1957), № 4.

[3] A. H. Stone, *Metrizability of decomposition spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **7** (1956), 690—700.

[4] Ю. М. Смирнов, „О сильно паракомпактных пространствах", Изв. Акад. Н. СССР, сер. мат., **20** (1956), 253—274.

[5] J. Nagata, *On a necessary and sufficient condition of metrizability*, J. Inst. Polytechn. Osaca City Univ., **1** (1950), 93—100.

[6] Ю. М. Смирнов, «О метризации топологических пространств», Усп. мат. наук, **6** (1951), 100—111.

[7] P. Alexandroff et P. Urysohn, Compt. Rend., Paris, **177** (1923), 1274—1276.

[8] A. H. Stone, *Paracompactness and product spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., **54** (1948), 977—982.

V. Ponomarev, AXIOMS OF COUNTABILITY AND CONTINUOUS MAPPING

The following Theorems are proved:

1. Spaces T_0 — are continuous open images of metric spaces if and only if they satisfy the 1-st axiom of countability.

The necessary and sufficient condition for the T_0-space X to be an image of a metric space under an open S-mapping is the existence in X of a point-countable base. In both cases the metric space, the image of which is X, may be supposed zero-dimensional and have the same weight as the space X.

2. Open S-mappings preserve the property of possessing a point-countable base.

3. If f is a closed continuous mapping of the T_1-space X with a point-countable base onto the T_1-space Y and $f^{-1}(y)$ is a compactum for every $y \in Y$, then Y possesses a point-countable base.

From Theorem 1 results the theorem of Schwartz [2] and from Theorem 2 and the known results of P. S. Alexandroff follows a theorem of A. H. Stone ([3], Th. 4).

4. A paracompact space which is the image of a metric space under a compact open mapping is metrisable.

БЮЛЛЕТЕНЬ
ПОЛЬСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
Серия мат., астр. и физ. наук
Том VIII, № 3, 1960

МАТЕМАТИКА

П. АЛЕКСАНДРОВ

О МЕТРИЗАЦИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Представлено 15 января 1960

Несмотря на то, что в работах Нагата, Ю. Смирнова и Бинга (см. напр. [3], глава 4) проблема метризации топологических пространств получила свое окончательное решение (более удовлетворительное, чем первое решение этой проблемы, данное П. С. Урысоном и мною в 1923 г. в работе [1]), обширный круг вопросов, связанных с теми или иными метризационными условиями, далеко не исчерпан: это показывают, например, новейшие работы А. Стона, Нагата и других а также непосредственно предшествующая настоящей заметке работа В. Пономарева „Аксиомы счетности и непрерывные отображения", в конце которой ставится новая метризационная задача.

То новое решение общей проблемы метризации, которое я даю в нижеследующих строках, примыкает к кругу идей упомянутой работы В. Пономарева: в основе этого решения лежит дальнейшее, по сравнению с работой В. Пономарева, усиление первой аксиомы счетности.

Под „пространством" будем все время понимать T_1-пространство. Назовем (открытую) базу $\mathfrak{V}$ пространства X равномерной, если она удовлетворяет следующему условию: *всякое бесконечное множество элементов базы* $\mathfrak{V}$, *содержащих данную (произвольную) точку* $x \in X$, *образует базу этой точки* *) *в пространстве* X.

Иначе условие равномерности базы $\mathfrak{V}$ можно выразить так: *Какова бы ни была точка* $x \in X$ *и ее окрестность* Ox, *существует не более конечного числа элементов базы* $\mathfrak{V}$, *содержащих точку* x *и пересекающихся с* $X \setminus Ox$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, всякое пространство, имеющее равномерную базу, удовлетворяет первой аксиоме счетности: если в базе $\mathfrak{V}$ какая нибудь точка имеет несчетное множество окрестностей, то, вводя в этом множестве счетное подмножество, получим счетную базу этой точки.

*) Множество $\sigma = \{U\}$ окрестностей точки x называется базой этой точки в пространстве X, если для любой окрестности Ox найдется такое $U \in \sigma$, что $U \subseteq Ox$.

Замечание 2. Пусть X — метрическое пространство и ω_n — покрытие, состоящее из шаров радиуса $1/n$. Вписываем в ω_n локально конечное покрытие ω_n'. Тогда $\mathfrak{B}=\bigcup_n \omega_n'$, как легко видеть, является равномерной базой пространства X. Итак, *всякое метризуемое пространство имеет равномерную базу.*

Замечание 3. В дальнейшем мы будем предполагать, что в равномерной базе $\mathfrak{B}$ пространства X не содержится многоточечных множеств, состоящих из изолированных точек.

I. *Всякая равномерная база $\mathfrak{B}$ пространства X является точечно-счетной* *).

В самом деле, пусть $\{O_n x\}$, $n=1, 2, 3, \ldots$ какая нибудь счетная база (неизолированной) точки x в пространстве X; так как $\bigcap_n O_n x = x$, то всякий элемент U базы $\mathfrak{B}$ пересекается с некоторым из множеств $X \setminus O_n x$. Рассмотрим те $U \in \mathfrak{B}$, которые содержат точку x; среди них лишь конечное число может пересекаться с $X \setminus O_n x$; совокупность этих U обозначим через σ_n. Тогда множество всех $U \in \mathfrak{B}$, содержащих точку x, есть счетная сумма $\bigcup_n \sigma_n$ конечных множеств, чем утверждение I доказано.

II. *Пусть σ — какая нибудь подсистема равномерной базы $\mathfrak{B}$. Существует точечно-конечная подсистема σ_0 системы σ:*

$$\sigma_0 \subseteq \sigma \subseteq \mathfrak{B},$$

с тем же телом **), *что и система σ.*

Доказательство. Нумеруем элементы системы σ посредством порядковых чисел: $\sigma=\{V_\alpha\}$, $\alpha < \omega_\tau$ (где ω_τ — начальное число мощности, равной мощности системы σ).

Полагаем $U_1 = V_1$ и предположим, что построены $U_\lambda = V_{\alpha_\lambda}$ для всех $\lambda < \lambda_0$ так, что

1°. Каждое V_ν, $\nu < \alpha_\lambda$, содержится в $\bigcup_{\mu<\lambda} U_\mu$.

2°. Множество U_λ не содержится в сумме $\bigcup_{\mu<\lambda} U_\mu$.

Если $\bigcup_{\lambda<\lambda_0} U_\lambda \neq \bigcup_\alpha V_\alpha$, то берем первое V_α, обозначим его $V_{\alpha_{\lambda_0}}$, не содержащееся в $\bigcup_{\lambda<\lambda_0} U_\lambda$ и полагаем $U_{\lambda_0} = V_{\alpha_{\lambda_0}}$.

Условие 2° очевидно выполнено для $\lambda = \lambda_0$.

Условие 1° тоже выполнено: при $\nu < \alpha_{\lambda_0}$ имеем $V_\nu \subseteq \bigcup_{\lambda<\lambda_0} U_\lambda$ (по определению α_{λ_0}).

---

*) Система множеств $\mathfrak{S}=\{U\}$, лежащих в X, называется точечно-счетной, если точка $x \in X$ принадлежит не более, чем счетному числу элементов системы $\mathfrak{S}$.

**) Телом системы σ множеств, лежащих в пространстве X, называется множество $\tilde{\sigma} \subseteq X$, являющееся суммой всех множеств-элементов системы σ.

Процесс останавливается на некотором $\lambda < \omega_\tau$, для которого $\bigcup_{\mu<\lambda} U_\mu = \bigcup_{\alpha<\omega_\tau} V_\alpha$.

Доказываем, что система $\sigma_0 = \{U_\lambda\} \subseteq \sigma$ точечно-конечна. В противном случае, пусть $x \in \bigcap_n U_{\lambda_n}$. Тогда $\{U_{\lambda_n}\}$ есть счетная база точки x и в ней можно выделить бесконечную убывающую подпоследовательность, которую, без ограничения общности, можно предположить совпадающей со всей последовательностью:

$$U_{\lambda_1} \supset U_{\lambda_2} \supset \ldots \supset U_{\lambda_n} \supset \ldots . \tag{1}$$

Ввиду условия 2° порядковые числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, могут итти только убывая; но тогда последовательность (1) может быть только конечной — вопреки предположению. Утверждение II доказано.

Следствие. *Всякое пространство с равномерной базой точечно паракомпактно.*

В самом деле, пусть в пространстве X дана равномерная база $\mathfrak{U}$. Пусть ω какое нибудь открытое покрытие пространства X. Вписываем в него покрытие σ, состоящее из элементов базы $\mathfrak{U}$ и берем в нем точечно конечное подпокрытие σ_0. Покрытие σ_0 и подавно вписано в ω.

III. *Пространство X тогда и только тогда имеет равномерную базу, когда оно имеет счетную полную систему точечно конечных покрытий* *).

Прежде чем доказывать эту теорему, заметим, что она ясно рисует связь между наличием равномерной базы и метризуемостью пространства: в самом деле, легко видеть, что *для метризуемости регулярного пространства X необходимо и достаточно наличия в этом пространстве счетной полной системы локально конечных покрытий* **).

Доказательство теоремы III. Обозначим через $\mathfrak{U}^i$ систему (быть может, пустую), состоящую из всех одноточечных открытых множеств (каждое из которых состоит, следовательно, из одной изолированной точки) пространства X.

Лемма 1. *Если $\mathfrak{U}$ какая нибудь база пространства X и $\mathfrak{S}$ точечно конечная система открытых в X множеств (не имеющая общих элементов с $\mathfrak{U}^i$), то $(\mathfrak{U} \setminus \mathfrak{S}) \cup \mathfrak{U}^i$ есть снова база пространства X.*

---

*) Система покрытий $\Sigma = \{\omega\}$ называется полной, если выбирая из каждого $\omega \in \Sigma$ произвольный элемент, содержащий данную (произвольную) точку $x \in X$, всегда получим базу этой точки.

**) Необходимо: если X метризуемо, то в силу метризационного условия [1] в X существует счетная полная система покрытий $\Sigma = \{\omega_n\}$. Вписываем в каждое ω_n локально конечное ω_n'; тогда $\{\omega_n'\}$ также есть полная система покрытий.

Достаточно: объединение счетной полной системы локально конечных покрытий есть, очевидно, база пространства, которое таким образом оказывается метризуемым по теореме Нагата-Смирнова.

В самом деле, если x — любая неизолированная точка пространства X и $\mathfrak{V}_x \subset \mathfrak{V}$ какая либо база этой точки, то лишь конечное число элементов системы $\mathfrak{V}_x$ может принадлежать к $\mathfrak{S}$. Поэтому, $\mathfrak{V}_x \setminus \mathfrak{S}$ есть база точки x. Лемма доказана.

Пусть теперь $\mathfrak{V}$ — равномерная база пространства X и $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{V}^i \cup \mathfrak{S}_1'$ какое нибудь содержащееся в ней точечно конечное покрытие (среди элементов $\mathfrak{S}_1'$ нет одноточечных открытых множеств). Тогда $\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V} \setminus \mathfrak{S}_1'$ есть снова равномерная база, в которой мы опять находим точечно конечное покрытие $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{V}^i \cup \mathfrak{S}_2'$. В равномерной базе $\mathfrak{V}_2 = \mathfrak{V}_1 \setminus \mathfrak{S}_2'$ находим точечно конечное покрытие $\mathfrak{S}_3 = \mathfrak{V}^i \cup \mathfrak{S}_3'$ и так далее.

В результате получаем последовательность покрытий $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n, \ldots, \mathfrak{S}_n = \mathfrak{V}^i \cup \mathfrak{S}_n', \ldots$, причем в $\mathfrak{S}_n$ и $\mathfrak{S}_m$ при $n \neq m$ нет других общих элементов, кроме принадлежащих $\mathfrak{V}^i$.

Отсюда и из того, что все $\mathfrak{S}_n$ являются подсистемами равномерной базы $\mathfrak{V}$ сразу следует, что последовательность $\{\mathfrak{S}_n\}$ образует полную счетную систему (точечно конечных) покрытий.

Пусть, обратно, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$, счетная полная система точечно конечных покрытий пространства X. Покажем, что в X существует равномерная база. Для этого, имея два каких нибудь покрытия α и β, обозначим через $\alpha \wedge \beta$ покрытие, составленное из всех множеств, являющихся пересечениями какого нибудь элемента покрытия α с каким нибудь элементом покрытия β. Если α и β точечно конечные покрытия, то точечно конечным является и покрытие $\alpha \wedge \beta$.

Положим теперь: $\omega_1' = \omega_1$ и, предполагая построенным ω_n', положим $\omega_{n+1}' = \omega_n' \wedge \omega_{n+1}$. Тогда последовательность $\{\omega_n'\}$ есть полная последовательность точечно конечных покрытий, из которых каждое следующее вписано в предыдущее. Положим $\mathfrak{V} = \bigcup \omega_n'$ и докажем, что $\mathfrak{V}$ — равномерная база. Если x произвольная точка пространства X $\{\Gamma\}$ — произвольная бесконечная система содержащих точку x множеств $\Gamma \in \mathfrak{V}$, то в каждом ω_n' может содержаться не более конечного числа этих Γ, так что в $\{\Gamma\}$ имеется бесконечная последовательность.

$$\sigma_0 = \{\Gamma_{n_k}\}, \quad n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

элементов Γ_{n_k}, принадлежащих, соответственно, покрытиям ω_{n_k}'. Требуется доказать, что σ_0 есть база точки x. Для каждого $k = 1, 2, 3, \ldots$ берем в каждом из покрытий ω_i', где $n_k \leq i < n_{k+1}$, по элементу $\Gamma_i \in \omega_i'$, содержащему $\Gamma_{n_{k+1}}$ (такое Γ_i существует, так как каждое ω_{i+1}' вписано в ω_i). Мы таким образом пополним систему $\sigma_0 = \{\Gamma_{n_k}\}$ до системы $\sigma = \{\Gamma_n\}$, имеющей по представителю в каждом ω_n' и поэтому являющейся (ввиду полноты системы покрытий ω_n') базой точки x. То, что σ_0 также есть база точки x, непосредственно вытекает из следующей очевидной леммы:

Лемма 2. *Пусть σ_0 есть система открытых множеств, каждое из которых содержит данную точку x; пусть $\sigma \supset \sigma_0$ есть также система открытых множеств, причем каждое $\Gamma \in \sigma$ содержит некоторое $\Gamma' \in \sigma_0$. Тогда, если σ есть база точки x, то базой точки x является и σ_0.*

Теорема III доказана.

Замечание. Из теоремы, доказанной В. В. Немыцким и мною в нашей совместной работе [2] следует, что *в каждое пространство X с равномерной базой можно ввести „симметрическую метрику Коши"* *).

В предыдущей заметке В. Пономарев обратил внимание на то, что *всякое паракомпактное пространство, имеющее счетную полную систему покрытий $\{\omega_n\}$ метризуемо* **). Так как, с другой стороны, всякое метризуемое пространство имеет равномерную базу, то получаем следующую теорему:

IV. *Для того, чтобы пространство было метризуемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было паракомпактом с равномерной базой.*

В силу известной теоремы Е. Майкла (см. напр. [3]), всякое коллективно нормальное ***) точечно паракомпактное пространство является паракомпактом. Поэтому из Теоремы IV и следствия Теоремы II вытекает

Метризационная теорема. *Для метризуемости топологического пространства необходимо и достаточно, чтобы оно было коллективно нормальным пространством с равномерной базой.*

П. С. Урысон в самом начале своих занятий проблемой метризации высказал гипотезу, что условие метризуемости должно получиться в результате одновременного усиления с одной стороны аксиом отделимости, а с другой — первой аксиомы счетности. Наш результат придает точное содержание этой гипотезе П. С. Урысона и доказывает ее спустя 35 лет после его смерти.

---

*)т. е. определить в пространстве X неотрицательную симметрическую функцию $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ пары точек, обращающуюся в нуль тогда и только тогда, когда $x = y$, определяющую данную в X топологию (это значит, что x есть точка прикосновения множества $M \subseteq X$ тогда и только тогда, когда $\inf\limits_{y \in M} \varrho(x, y) = 0$) и удовлетворяющую „условию Коши": всякая сходящаяся последовательность точек есть фундаментальная.

**) В. Пономарев выводит это заключение из метризационной теоремы, доказанной П. С. Урысоном и мною в [1]; оно сразу следует также из теоремы Нагата-Смирнова: вписывая в каждое ω_n локально конечное покрытие ω_n', сразу получаем базу $\bigcup\limits_n \omega_n'$, удовлетворяющую условию этой теоремы.

***) Пространство называется коллективно нормальным, если в нем всякая дискретная система замкнутых множеств имеет дизъюнктную систему окрестностей. При этом система $\Sigma = \{F\}$ замкнутых множеств дискретна, если она дизъюнктна (т.е. множества F попарно не пересекаются) и если сумма любой подсистемы системы Σ замкнута.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Alexandroff et P. Urysohn, Comptes Rendus Acad., Paris, **177** (1923), 1274—1276.

[2] П. Александров и В. Немыцкий, «Условие метризуемости топологических пространств и аксиома симметрии», Матем. сборн., **3** (1938), 663—672.

[3] J. Kelley, *General Topology.*

P. Alexandroff, ON THE METRISATION OF TOPOLOGICAL SPACES

The author gives new conditions in which topological space is metrisable. He introduces the notion of a uniform base, that is an open base B of the space X with the following property: for an arbitrary point $x \in X$ and an arbitrary neighbourhood Ox there exists in B only a finite number of elements containing the point x and having points in common with $X \setminus Ox$.

Chief Theorems:

1. A topological space is metrisable if and only if it is paracompact and has a uniform base.

2. A topological space is metrisable if and only if it is collectionwise normal and has a uniform base.

3. A space has a uniform base if and only if it possesses a full countable system of point-finite covers.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 3, 1960

MATHEMATICS

Some Properties of Schauder Basis of the Space $C_{\langle 0,1\rangle}$

by

Z. CIESIELSKI

Presented by W. ORLICZ on January 19, 1960

In this note we give a solution of the problem formulated in [2].

Let ω be any positive function defined over $\langle 0,1\rangle$. In the sequel, the following three conditions will be imposed on the function ω:

(*) $\omega(t)$ is non-decreasing in $\langle 0,1\rangle$ and $\omega(2t) \leqslant K\omega(t)$ for $0 \leqslant 2t \leqslant 1$, where K denotes a positive constant;

(**) the inequality

$$\int_0^{\delta} \frac{\omega(t)}{t}\,dt \leqslant L\omega(\delta)$$

holds for $0 < \delta \leqslant 1$, where L denotes a positive constant;

(***) the inequality

$$\delta \int_{\delta}^{1} \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt \leqslant M\omega(\delta)$$

holds for $0 < \delta \leqslant 1$, where M denotes a positive constant.

In the sequel the following notations will be used: $C_{\langle 0,1\rangle}$ denoting the space of all real functions x continuous in $\langle 0,1\rangle$, $\|x\| = \max_{\langle 0,1\rangle} |x(t)|$, $\omega_1(\delta)$ — the modulus of continuity of the function $x \in C_{\langle 0,1\rangle}$, i. e.:

(a) $$\omega_1(\delta) = \sup_{\substack{t_1, t_2 \in \langle 0,1\rangle \\ |t_1 - t_2| \leqslant \delta}} |x(t_1) - x(t_2)|;$$

moreover, let $\{\chi_n\}$ denote the orthonormal set of Haar functions [1], [2] and let $\{\varphi_n\}$ denote the set of functions defined as follows:

(b) $$\varphi_0(t) \equiv 1, \quad \varphi_n(t) = \int_0^t \chi_n(\tau)\,d\tau \quad \text{for} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Let us write

(c) $$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(t), \quad \text{where} \quad a_0 = x(0), \quad a_k = \int_0^1 \chi_k(\tau)\,dx(\tau) \quad \text{for} \quad k \geqslant 1.$$

We now quote two theorems from [2].

THEOREM 1. *The series*

$$x(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^1 \chi_n(\tau)\,dx(\tau)\right]\varphi_n(t)$$

converges uniformly to $x(t)$ *in* $\langle 0,1\rangle$, *whenever* $x\in C_{\langle 0,1\rangle}$.

THEOREM 2. *Let* ω *satisfy the conditions* (*) *and* (**) *and let*

$$|a_1|\leqslant\omega(1),\qquad |a_{2^n+k}|\leqslant\sqrt{2^n}\,\omega\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

for any $x\in C_{\langle 0,1\rangle}$ *and* $n=0,1,\ldots;\ 1\leqslant k\leqslant 2^n$. *Then*

$$\|x-S_n\|\leqslant K(1+L/\log 2)\,\omega(1/n)\quad \text{for}\quad n=1,2,\ldots.$$

The latter Theorem is a small modification of the Theorem 4 from [2].

THEOREM 3. *Suppose that the function* $\omega(t)$ *is non-decreasing in* $\langle 0,1\rangle$. *Moreover, let the inequality*

$$\|x-S_n\|\leqslant\omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

hold for any $x\in C_{\langle 0,1\rangle}$ *and for* $n=1,2,\ldots$. *Then*

$$\omega_1(\delta)\leqslant 6^2\,\delta\left[2\omega(1)+\int_{\delta}^{1}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt\right]\quad \text{for}\quad 0<\delta\leqslant 1.$$

Proof. Let p and ν denote any non-negative integers such that $1\leqslant p\leqslant 2^\nu$, and let $t',t''\in\left\langle\frac{p-1}{2^\nu},\frac{p}{2^\nu}\right\rangle$. By Theorem 1 we get

$$|x(t')-x(t'')|\leqslant\frac{1}{2^\nu}\,\omega(1)+\sum_{n=0}^{\nu-1}\sum_{q=1}^{2^n}|a_{2^n+q}|\,|\varphi_{2^n+q}(t')-\varphi_{2^n+q}(t'')|+$$

$$+2\left|\sum_{k=2^\nu+1}^{\infty}a_k\,\varphi_k\right|;$$

hence, by the inequalities

$$\sup_{1\leqslant q\leqslant 2^n}|a_{2^n+q}|\leqslant 2\sqrt{2^n}\,\|x-S_{2^n}\|\leqslant 2\sqrt{2^n}\,\omega\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

and

$$\sum_{q=1}^{2^n}|\varphi_{2^n+q}(t')-\varphi_{2^n+q}(t'')|\leqslant\frac{\sqrt{2^n}}{2^\nu}$$

for $n=0,\ldots,\nu-1$, we obtain

$$|x(t')-x(t'')|\leqslant\frac{9}{2^\nu}\sum_{k=1}^{2^\nu}\omega\left(\frac{1}{k}\right).$$

Now let t_1, t_2 denote any two points of the interval $\langle 0,1\rangle$, $(t_1 \neq t_2)$. There exists a non-negative integer V_0 such that

$$\frac{1}{2^{\nu_0}} \geqslant |t_1 - t_2| > \frac{1}{2^{\nu_0+1}}.$$

Moreover, there is a positive integer p_0 such that either $t_1, t_2 \in \left\langle \frac{p_0-1}{2^{\nu_0}}, \frac{p_0}{2^{\nu_0}} \right\rangle$ or $\min(t_1, t_2) \in \left\langle \frac{p_0-1}{2^{\nu_0}}, \frac{p_0}{2^{\nu_0}} \right\rangle$ and $\max(t_1, t_2) \in \left\langle \frac{p_0}{2^{\nu_0}}, \frac{p_0+1}{2^{\nu_0}} \right\rangle$.

In both these cases we have

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant \frac{18}{2^{\nu_0}} \sum_{k=1}^{2^{\nu_0}} \omega\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{18}{2^{\nu_0}} \left[\omega(1) + \int_{1/2^{\nu_0}}^{1} \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt\right]$$

$$\leqslant 6^2 |t_1 - t_2| \left[\omega(1) + \int_{|t_1-t_2|}^{1} \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt\right].$$

Since the function

$$\left[t \int_t^1 \frac{\omega(u)}{u^2}\, du + \int_0^t \omega(u)\, du\right]$$

is non-decreasing in $\langle 0,1\rangle$, we have

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant 6^2 \delta \left[\omega(1) + \int_\delta^1 \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt + \int_0^\delta \omega(t)\, dt\right]$$

$$\leqslant 6^2 \delta \left[2\omega(1) + \int_\delta^1 \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt\right]$$

for $|t_1 - t_2| \leqslant \delta$. Thus the Theorem is proved.

THEOREM 4. *For each ω satisfying the conditions (*) and (**) there is a function $x \in C_{\langle 0,1\rangle}$ such that*

$$x - S_n \sim \omega\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{for} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

and

$$\omega_1(\delta) \geqslant \frac{A}{4} \delta \left[\omega(1) + \int_\delta^1 \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt\right] \quad \text{for} \quad 0 < \delta \leqslant 1,$$

where $1/A = K(1 + L/\log 2)$.

Proof. Let us write

$$x(t) = A\omega(1)\, t + A \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2^n}\, \omega\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \varphi_{2^n+1}(t).$$

Applying Theorem 2 we get $\|x - S_n\| \leqslant \omega(1/n)$ for $n = 1, 2, \ldots$. By Theorem 1, we have

$$\left|x\left(\frac{1}{2^n}\right) - x(0)\right| = \frac{A}{2^n}\omega(1) + A\sum_{\nu=0}^{n-1} 2^{\nu/2}\,\omega\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}\right)\varphi_{2^\nu+1}\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \frac{A}{2^n}\omega(1) + \frac{A}{2^{n+1}}\sum_{\nu=0}^{n} 2^{\nu+1}\,\omega\left(\frac{1}{2^{\nu-1}}\right)$$

$$\geqslant \frac{A}{2^{n+1}}\omega(1) + \frac{A}{2^{n+1}}\sum_{\nu=1}^{2^{n-1}-1}\omega\left(\frac{1}{\nu}\right) \geqslant \frac{A}{2^{n+1}}\left[\omega(1) + \int_{1/2^{n-1}}^{1}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt\right].$$

Now, let $\frac{1}{2^n} \geqslant \delta > \frac{1}{2^{n+1}}$ for any $\delta \in (0, 1\rangle$. Finally, we obtain

$$\omega_1(\delta) \geqslant \omega_1\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \geqslant \left|x\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) - x(0)\right|$$

$$\geqslant \frac{A}{2^{n+2}}\left[\omega(1) + \int_{1/2^{n-1}}^{1}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt\right] \geqslant \frac{A}{4}\,\delta\left[\omega(1) + \int_{\delta}^{1}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt\right].$$

Our theorems lead to the following conclusion

Let ω satisfy the conditions (*), (**) and (***). Then for every $x \in C_{\langle 0,1\rangle}$ the following three conditions are equivalent:

1° $a_n = O\left[n\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$,

2° $|x - S_n| = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$,

3° $\omega_1(\delta) = O[\omega(\delta)]$,

where O depends only on ω.

By Theorem 2 the condition 1° implies 2°, and by Theorem 3, 2° implies 3°; finally, the implication 1° by 3° is evident.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)

REFERENCES

[1] S. Kaczmarz und H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Warszawa-Lwów, 1935.

[2] Z. Ciesielski, *On Haar functions and on the Schauder basis of the space* $C_{\langle 0,1\rangle}$, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys., **7** (1959), 227—232.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 3, 1960

MATHÉMATIQUE

Sur les prolongements d'une connexion linéaire

par

W. ŚLEBODZIŃSKI

Présenté par E. MARCZEWSKI le 18 Janvier, 1960

1. Soit B un espace fibré principal dont la base est une variété V^n de classe infinie et dont le groupe de structure est un groupe de Lie Γ de dimension m, représenté par les transformations de l'espace vectoriel à n dimensions

$$v^\varkappa = a^\varkappa_\varrho(u)\, v^\varrho, \qquad u \in \Gamma, \tag{1}$$

où les indices grecs parcourent les valeurs $1, 2, \ldots, n$ et les indices latins les valeurs $1, 2, \ldots, m$. L'espace B est par suite une variété différentiable de classe infinie et de dimension $n+m$.

Supposons qu'il soit donnée sur B une connexion linéaire L. A L est associé un système de n formes pfafiennes indépendantes définies sur B, qui s'obtiennent de la manière suivante. On considère un voisinage arbitraire U d'un recouvrement de V^n et le produit $U \times \Gamma$; dans ce produit, qui est homéomorphe à un voisinage de l'espace fibré B, les formes $\omega^\varkappa$ s'obtiennent en effectuant (1) sur n formes pfafiennes Θ^ϱ données dans U:

$$\omega^\varkappa = a^\varkappa_\varrho(u)\, \Theta^\varrho .$$

Les équations de structure L peuvent alors s'écrire de la manière suivante

$$d\omega^\varkappa + a^\varkappa_{h\mu}[\tau^h \omega^\mu] = \frac{1}{1} c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}[\omega^\lambda \omega^\mu]. \tag{2}$$

Les τ^h désignent ici des formes pfaffiennes indépendantes définies sur la fibre Γ et invariantes à gauche; ces formes satisfont aux relations

$$d\tau^h = \frac{1}{2} \gamma^{\cdot\cdot h}_{ij}[\tau^i \tau^j], \tag{3}$$

où les coefficients $\gamma^{\cdot\cdot h}_{ij} = -\gamma^{\cdot\cdot h}_{ji}$ sont les constantes de structure du groupe Γ. Les coefficients $c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} = -c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\mu\lambda}$ sont des fonctions définies sur

B et les $a^{\varkappa}_{h\mu}$ sont les coefficients constants des transformations infinitésimales

$$U_h f = a^{\varkappa}_{h\mu} v^{\mu} \frac{\partial f}{\partial v^{\varkappa}}$$

de la représentation linéaire (1) de Γ.

La torsion et la courbure de la connexion L sont définies respectivement par les formes quadratiques extérieures

$$\Omega^{\varkappa} = \frac{1}{2} c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} [\omega^{\lambda} \omega^{\mu}], \qquad \Omega^{\varkappa}_{\lambda} = d\omega^{\varkappa}_{\lambda} + [\omega^{\varkappa}_{\varrho} \omega^{\varrho}_{\lambda}],$$

où

$$\omega^{\varkappa}_{\lambda} = a^{\varkappa}_{h\lambda} \tau^{h}.$$

2. Les définitions principales et les formules concernant la connexion L ainsi rappelées, remarquons qu'on peut en déduire une nouvelle connexion linéaire sur B en remplaçant les τ^h dans les équations (2) par les formes linéaires

$$\Pi^h = \tau^h + l^h_{\lambda} \omega^{\lambda}, \tag{4}$$

où l^h_{λ} désignent des fonctions arbitraires données sur B. Les équations de structure de la nouvelle connexion auront alors la forme

$$d\omega^{\varkappa} + a^{\varkappa}_{h\mu} [\Pi^h \omega^{\mu}] = \frac{1}{2} \bar{c}^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} [\omega^{\lambda} \omega^{\mu}], \tag{5}$$

où les coefficients $\bar{c}^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$ sont donnés par les formules

$$\bar{c}^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} = c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} - a^{\varkappa}_{h\mu} l^h_{\lambda} + a^{k}_{h\lambda} l^h_{\lambda}. \tag{6}$$

Il se pose maintenant la question, si dans la famille F des connexions linéaires ainsi obtenue il y a une, détérminée, qui soit invariablement liée à l'espace fibré B. C'est au fond un problème d'équivalence qui peut être traité au moyen de la méthode générale d'E. Cartan [3]. Nous allons considérer dans ce but les l^h_{λ} dans les équations (6) comme des paramètres arbitraires et nous nous proposons de disposer de ces paramètres de manière à annuler le plus grand nombre possible des coefficients $\bar{c}^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$ dans les équations (5).

Supposons d'abord que ce postulat détermine complètement les paramètres l^h_{λ} en fonction du point de l'espace B. Les formes (4) et les coefficients $\bar{c}^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$ deviennent alors des expressions bien déterminées sur B et l'on obtient ainsi une connexion liée invariablement à cet espace; nous l'appellerons connexion distinguée.

On peut donner deux exemples des espaces fibrés qui admettent une connexion linéaire distinguée. Ce sont les cas, où le groupe de structure Γ de l'espace B est un groupe orthogonal ou, pour $n \geqslant 3$, le groupe orthogonal accompagné d'une homothétie. Dans le premier cas la connexion

distinguée est une connexion riemannienne, dans le second — une connexion weylienne, les deux connexions étant sans torsion ($\bar{c}^{\cdot\cdot x}_{\lambda\mu} = 0$). Il semble probable que ce sont les seuls cas, où une connexion distinguée existe.

Les composantes de la courbure d'une connexion riemannienne ou wyelienne sont fonctions du point de l'espace fibré B. Ce sont les invariants de la connexion qui dans un voisinage de B homéomorphe au produit $U \times \Gamma$, où U est un voisinage arbitraire de la base V^n, dépendent du point $x \in U$ et du point $u \in \Gamma$; on les appelle invariants relatifs de la connexion. De ces invariants on peut déduire par différentiation une suite illimitée d'autres invariants relatifs et ensuite des invariants absolus ne dépendant que du point x. Le problème de l'équivalence de deux connexions riemanniennes ou weyliennes, basées sur une variété V^n, se réduit à la recherche de n invariants absolus indépendants. Ce problème a été résolu par E. Cartan pour le cas de la connexion riemanienne [1], sa méthode pouvant être appliquée, avec des changements convenables, au problème de l'équivalence de deux connexions weyliennes.

3. Envisageons maintenant le cas, où l'espace fibré B n'admet pas une connexion linéaire distinguée et admettons que l'on ait choisi les l^h_λ dans les équations (4) de manière à annuler le plus grand nombre possible des coefficients $\bar{c}^{\cdot\cdot x}_{\lambda\mu}$. La famille des connexions linéaires déduites d'une connexion donnée sur B se restreint à une famille plus étroite F_1 des connexions que l'on obtient en opérant dans les équations (5) la substitution suivante

$$\Pi^h_1 = \Pi^h + k^h_\lambda \, \omega^\lambda , \tag{7}$$

où les coefficients k^h_λ sont assujettis aux relations linéaires

$$a^x_{h\mu} \, k^h_\lambda - a^x_{h\lambda} \, k^h_\mu = 0 . \tag{8}$$

Remarquons que la substitution (7) ne touche en rien dans les équations (6) les coefficients réduits $\bar{c}^{\cdot\cdot x}_{\lambda\mu}$ qui sont des invariants différentiels de la famille F_1. Le rang du système (8) est un nombre $m_1 > 0$ et par conséquent sa solution la plus générale peut être présentée sous la forme

$$k^h_\lambda = \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\lambda} \, u^{i_1}_1 ,$$

où les indices i_1 parcourent les valeurs $1, 2, \ldots, m_1$, les $\overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\lambda}$ sont des constantes satisfaisantes aux conditions

$$a^x_{h\mu} \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\lambda} - a^x_{h\lambda} \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\mu} = 0 ,$$

et les $u^{i_1}_1$ sont des paramètres arbitraires au nombre m_1. Le formules (7) peuvent donc s'écrire comme il suit

$$\Pi^h_1 = \Pi^h - \overset{(1)}{a}{}^h_{i_1\lambda} \, u^{i_1}_1 \, \omega^\lambda ; \tag{9}$$

si on leur adjoint les équations $\omega_1^k = \omega^k$, on obtient les transformations d'un groupe linéaire abélien Γ_1, de dimension m_1, déterminé par Γ.

4. En prenant comme base l'espace fibré B et Γ_1 pour groupe de structure, on obtient un nouveau espace fibré principal que nous désignerons par B_1. Les formes

$$\omega_1^\varkappa = \omega^\varkappa, \qquad \Pi_1^h = \Pi^h - \overset{(1)}{a}{}^h_{i,\lambda}\, u_1^{i_1}\, \omega^\lambda$$

déterminent sur B_1 une connexion linéaire du groupe Γ_1; nous la désignerons par L_1 et nous dirons que L_1 est un prolongement de la connexion L définie au par. 1. Les équations de structure de L_1 se composent de deux groupes; on obtient le premier en introduisant les expressions (9) dans les equations (5)

$$d\omega^\varkappa + a^\varkappa_{h\mu}\,[\Pi_1^h\ \omega^\mu] = \frac{1}{2}\ c^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}\,[\omega^\lambda\ \omega^\mu].$$

(Pour simplifier l'écriture nous avons supprimé ici la barre sur le symbole $\bar{c}^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$ et l'incide 1 dans le symbole $\omega_1^\varkappa$).

Pour obtenir le second groupe il faut différentier extérieurement les équations (9); comme les formes Π^h sont définies sur B par les formules (4), on trouve, en tenant compte des équations (3), des expressions de la forme suivante

$$(10)\qquad d\,\Pi_1^h + \overset{(1)}{a}{}^h_{i,\lambda}\,[du_1^{i_1}\ \omega^\lambda] = \frac{1}{2}\ \gamma^{\cdot\cdot h}_{ij}\,[\Pi_1^i\ \Pi_1^j] + p^h_{i,\lambda}\,[\Pi_2^{i_1}\ \omega^\lambda] + \frac{1}{2}\ \overset{(1)}{c}{}^{\cdot\cdot h}_{\lambda\mu}\,[\omega^\lambda\ \omega^\mu].$$

De la connexion L_1 on peut déduire sur B_1 une famille des connexions prolongées en posant

$$(11)\qquad \Pi_2^{i_1} = du_1^{i_1} - t^{i_1}_\lambda\,\omega^\lambda\,,$$

où les coefficients $t^{i_1}_\lambda$ sont des fonctions arbitraires définies sur B_1. On introduit dans les équations (10) les formes $\Pi_2^{i_1}$ au lieu des différentielles $du_1^{i_1}$ et on cherche à déterminer les coefficients $t^{i_1}_\lambda$ de manière à faire disparaître le plus grand nombre possible des coefficients $\overset{(1)}{c}{}^{\cdot\cdot h}_{\lambda\mu}$. Si les équations

$$(12)\qquad \overset{(1)}{a}{}^h_{i,\lambda}\ t^{i_1}_\mu - \overset{(1)}{a}{}^h_{i,\mu}\ t^{i_1}_\lambda = 0$$

n'admettent que la solution nulle, on obtient pour les inconnues $t^{i_1}_\lambda$ des expressions bien déterminées et il en sera de même des formes (11) et des coefficients des équations de structure

$$d\,\Pi_1^h + \overset{(1)}{a}{}^h_{i,\lambda}\,[\Pi_2^{i_1}\ \omega^\lambda] = \frac{1}{2}\ \gamma^{\cdot\cdot h}_{ij}\ [\Pi_1^i\ \Pi_1^j] + p^h_{i,\lambda}\,[\Pi_2^{i_1}\ \omega^\lambda] + \frac{1}{2}\ \overset{(1)}{a}{}^{\cdot\cdot h}_{\lambda\mu}\,[\omega^\lambda\ \omega^\mu].$$

On trouve ainsi sur B_1 une connexion prolongée, invariablement liée à l'espace fibré B, et les coefficients dans la dernière équation sont ses invariants numériques ou différentiels dont on peut se servir pour résoudre le problème de l'équivalence. Si les équations (12) admettent des solutions non-nulles, le prolongement L_1 de L n'est pas complètement déterminé et l'on obtient une famille des connexions prolongées en posant dans les équations (11)

$$t^{i_1}_{\lambda} = \overset{(2)}{a}{}^{i_1}_{i_2\lambda}\, u^{i_2}_2,$$

où les $\overset{(2)}{a}{}^{i_1}_{i_2\lambda}$ désignent des constantes satisfaisantes aux relations

$$\overset{(1)}{a}{}^{h}_{i_1\mu}\, \overset{(2)}{a}{}^{i_1}_{i_2\lambda} - \overset{(1)}{a}{}^{h}_{i_1\lambda}\, \overset{(2)}{a}{}^{i_1}_{i_2\mu} = 0$$

et les $u^{i_2}_2$ $(i_2 = 1, 2, \ldots, m_2)$ sont des paramètres arbitraires. Les formules (11) prennent alors la forme suivante

$$\Pi^{i_1}_2 = du^{i_1}_1 - \overset{(2)}{a}{}^{i_1}_{i_2\lambda}\, u^{i_2}_2\, \omega^{\lambda}$$

et elles représentent les transformations d'un groupe linéaire Γ_2 de dimension m_2 déterminé par Γ_1.

5. En poursuivant le procédé présenté plus haut, on obtient ainsi une suite des groupes linéaires

$$\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \tag{13}$$

dont chacun est déterminé par celui qui le précède, et une suite correspondante des espaces fibrés principaux

$$B, B_1, B_2, B_3, \ldots, \tag{14}$$

dont chacun a pour base l'espace qui le précède. Sur un espace B_k de la suite (14) une suite des formes linéaires invariantes $\omega^k, \Pi^h_1, \Pi^{h_1}_2, \ldots, \Pi^i_k$ peut être déterminée qui définissent sur B_k une famille des connexions linéaires prolongées. Si un groupe Γ_k se réduit à l'identité, on obtient sur B_k une connexion prolongée déterminée et liée invariablement à l'espace B. Si cela n'arrive pas, la suite (13) est infinie et les groupes Γ_k donnent naissance au groupe linéaire $\Gamma_\infty = \Gamma \times \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \ldots$ agissant sur un espace vectoriel de dimension infinie. On peut dire dans ce cas (p. ex. pour $\Gamma = GL(n, R)$) que sur le produit infini $V^n \times B \times B_1 \times B \times \ldots$ est définie une connexion L_∞ ayant Γ_∞ pour groupe de structure; cette connexion est definie par la suite infinie des formes $\omega^k, \Pi^h_1, \Pi^{h_1}_2, \Pi^{h_2}_3, \ldots$.

Remarque. Le raisonnement de cet article offre une analogie étroite avec les recherches sur la structure des pseudogroupes de Lie (cf. [2], p. 636 et [4], p. 131) et il peut être appliqué à l'étude de la topologie d'un groupe infini de Lie. Nous y reviendrons dans un autre travail.

INSTITUT MATHEMATIQUE, ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)

OUVRAGES CITÉS

[1] E. Cartan, *Sur les équations de la gravitation d'Einstein*, J. Math. pures et appl., **1** (1922), 141—203.

[2] — , *Sur la structure des groupes infinis de transformations*, Oeuvres complètes, Partie II, vol. 2 (1953) 571—714.

[3] — , *Les problèmes d'équivalence*, ibid., 1311—1334.

[4] S. S. Chern, *Pseudogroupes continus infinis*, Colloque de Strasbourg (Géométrie Différentielle), (1953), 119—136.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 3, 1960

MATHÉMATIQUE

Sur les solutions périodiques de l'équation différentielle $x'' + g(x) = p(t)$

par

Z. OPIAL

Présenté par T. WAŻEWSKI le 21 janvier 1960

1. Toutes les solutions non triviales de l'équation différentielle linéaire

$$x'' + h^2 x = 0 \qquad (h > 0) \tag{1}$$

sont périodiques et leurs périodes sont toutes égales à $2\pi/h$. On sait que *si la fonction continue $p(t)$ est périodique de période T et si, pour un entier positif n, on a*

$$2(n-1)\pi/h < T < 2n\pi/h, \tag{2}$$

c'est-à-dire si T n'est pas un multiple de $2\pi/h$, l'équation différentielle non homogène associée à (1),

$$x'' + h^2 x = p(t), \tag{3}$$

admet au moins une solution périodique de période T. Pour le vérifier il suffit de développer la fonction $p(t)$ en série de Fourier

$$p(t) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} t \right)$$

et de chercher ensuite une solution $x(t)$ de l'équation (3) en forme d'une autre série de Fourier

$$x(t) \sim \frac{1}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos \frac{2n\pi}{T} t + d_n \sin \frac{2n\pi}{T} t \right).$$

Par un procédé formel bien connu on trouve alors

$$x(t) = a_0/2h^2 - T^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n\pi)^2 - T^2 h^2} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} t \right),$$

où l'on a pu remplacer le signe $\sim$ par le signe d'égalité puisque la série en question est manifestement convergente. Cela étant, il reste seulement

à démontrer que cette solution formelle est bien une solution réelle de l'équation (3), ce qui est immédiat lorsqu'on remplace cette équation par une équation intégrale.

Si, au contraire, la période T du second membre de l'équation (3) est un multiple de $2\pi h$, l'équation (3) peut ne pas admettre de solutions périodiques ce qui est étroitement lié au phénomène de la résonance.

2. Le passage du cas des équations linéaires (1) et (3) au cas plus général des équations non linéaires du même type

$$x'' + g(x) = 0, \tag{4}$$

$$x'' + g(x) = p(t), \tag{5}$$

n'est pas simple, vu que dans ce dernier cas la méthode du développement en séries de Fourier n'est plus applicable. D'autre part, les solutions non triviales de l'équation (4), bien qu'elles soient, dans certaines hypothèses bien simples sur la fonction $g(x)$, toutes périodiques, ont, en général, des périodes différentes, de sorte que la condition (2) qui excluait la possibilité de résonance est privée de sens dans le cas des équations non linéaires.

Dans la présente note je me propose de montrer comment, malgré les difficultés que nous venons de signaler, il est possible d'établir un théorème général (cf. [4], Théorème 1) d'existence des solutions périodiques de l'équation non linéaire (5). Ce théorème comprend comme cas particulier cette partie du théorème cité du travail [1] qui correspond à $n = 1$, et qui peut être sommairement énoncé comme suit: *si les périodes des solutions non triviales de l'équation* (4) *sont toutes supérieures à* $T_0 > 0$, *l'équation* (5) *admet au moins une solution périodique, quelle que soit la fonction périodique* $p(t)$ *de période* $T < T_0$.

Par contre, cette partie du théorème envisagé qui correspond aux intervalles (2) avec $n = 2, 3, \ldots$ semble décrire une propriété très particulière des équations linéaires et il est très peu probable qu'elle puisse être susceptible d'une généralisation raisonnable dans le cas des equations non linéaires.

3. Avant de passer à l'énoncé précis et à la démonstration du théorème dont nous venons de parler, précisons les conditions imposées à la fonction $g(x)$. Supposons notamment que l'on ait

$$xg(x) > 0, \tag{6}$$

quel que soit $x \neq 0$, et

$$\lim_{|x| \to \infty} |g(x)| = +\infty. \tag{7}$$

Posons

$$G(x) = \int_0^x g(u)\,du. \tag{8}$$

L'équation (4) est équivalente aux systèmes d'équations

$$x' = y, \qquad y' = -g(x). \tag{9}$$

Toute solution non triviale $(x(t), y(t))$ de ce système est périodique et le point mobile $P(x(t), y(t))$ parcourt une courbe de niveau L de la fonction $y^2 2 + G(x)$. Les parties de L contenues dans les quadrants $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$ sont parcourues dans les intervalles de temps égaux à

$$T(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{G(\xi) - G(x)}},$$

$(\xi, 0)$ désignant le point d'intersection de L avec le demi-axe $x \geqslant 0$. De même, si $(\eta, 0)$ est le point d'intersection de L avec le demi-axe $x \leqslant 0$, les parties de L contenues dans les quadrants $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$ sont parcourues dans les intervalles de temps égaux à

$$T(\eta) = \frac{1}{2} \int_{\eta}^{0} \frac{dx}{\sqrt{G(\eta) - G(x)}}.$$

Inversement, à tout $\xi > 0$ (resp. $\eta < 0$) correspond une courbe de niveau de la fonction $y^2 2 + G(x)$ passant par le point $(\xi, 0)$ (resp. $(\eta, 0)$) et, par conséquent, une (aux translations parallèles à l'axe des t près) solution du système (9).

4. THÉORÈME 1. *Si la fonction continue $g(x)$ satisfait aux conditions* (6), (7) *et si l'on a*

$$\liminf_{x \to +\infty} T(x) \quad T_0 \, 4 \quad (T_0 \quad 0), \tag{10}$$

pour toute fonction $p(t)$ continue et périodique de période $T < T_0$, l'équation (5) *admet au moins une solution périodique de période T.*

Démonstration. L'équation (5) est équivalente au système

$$x' = y, \qquad y' = -g(x) + p(t). \tag{11}$$

La fonction périodique $p(t)$ est évidemment bornée, on a donc

$$|p(t)| \leqslant p \qquad (-\infty < t < +\infty). \tag{12}$$

Désignons par $(x(t; u, v), y(t; u, v))$ cette solution du système (11) qui, pour $t = 0$, passe par le point (u, v). Introduisons trois champs vectoriels C_1, C_2 et C_3 et faisant correspondre à tout point (u, v) trois vecteurs $V_1(u, v)$, $V_2(u, v)$ et $V_3(u, v)$ égaux à $(v, -g(u))$, $(v, -g(u) + p(0)) = (x'(0; u, v), y'(0; u, v))$ et $((x(T; u, v) - u)/T, (y(T; u, v) - v)/T$ respectivement. Pour démontrer notre théorème il suffit de prouver qu'il existe au moins un point (u_0, v_0) tel que $V_3(u_0, v_0) = 0$, c-à-d.

$$x(T; u_0, v_0) = x(0; u_0, v_0) = u_0, \qquad y(T; u_0, v_0) = y(0; u_0, v_0) = v_0. \tag{13}$$

Considérons à cet effet la courbe L:

$$\frac{1}{2}y^2 + G(x) = C, \tag{14}$$

où C est une constante positive. Les vecteurs du champ C_1 sont tangents à L et, par conséquent, l'indice de L par rapport à C_1 est égal à $+1$. Ci C est suffisamment grand, il en est de même du champ C_2. Nous allons montrer que, pour C suffisamment grand, l'indice de L par rapport à C_3 est égal à celui par rapport à C_2, c-à-d. à $+1$. Cela nous permettra de conclure qu'il existe à l'intérieur de L au moins un point $(u_0\ v_0)$ pour lequel on a (13) (cf. [2], p. 337 et [4]).

Pour effectuer un passage continu du champ C_2 au champ C_3 il suffit [1] d'envisager les champs vectoriels $W_\lambda(u, v) = ((x(\lambda; u, v) - u)/\lambda,\ (y(\lambda; u, v) - v)/\lambda)$ $(0 < \lambda \leqslant T)$, car on a évidemment $W_T(u, v) = V_3(u, v)$ et $\lim_{\lambda \to 0} W_\lambda(u, v) = V_2(u, v)$. Pour achever la démonstration il reste donc à prouver que, pour C suffisamment grand, aucun des vecteurs $W_\lambda(u, v)$ $(0 < \lambda \leqslant T)$ ne peut s'annuler sur L, ou, autrement dit, pour aucun point $(u_0, v_0) \in L$ il n'existe

$$x(\lambda_0; u_0, v_0) = u_0, \qquad y(\lambda_0; u_0, v_0) = v_0 \qquad (0 < \lambda_0 \leqslant T). \tag{15}$$

Remarquons d'abord que de (15) il résulte que la courbe K: $x = x(t; u_0, v_0)$, $y = y(t; u_0, v_0)$ $(0 \leqslant t \leqslant \lambda_0)$ est fermée. D'autre part, en posant $H(t) = y^2(t; u_0, v_0)/2 + G(t; u_0, v_0))$, on a, en vertu des relations (5) et (12):

$$|y'(t)\, y(t) + g(x(t))\, x'(t) = p(t)\, y(t)| \leqslant p\ y(t) \leqslant \frac{1}{2}(p^2 + y^2(t))$$

$$\leqslant p^2 + \frac{1}{2}\ y^2(t) + G(x(t)),$$

c-à-d. $|H'(t)| \leqslant p^2 + H(t)$. Il en vient que dans l'intervalle $\langle 0, \lambda_0 \rangle$ la fonction $H(t)$ satisfait à l'inégalité $H(t) \geqslant -p^2 + Ce^{-\lambda_0}$ ce qui signifie que la courbe K est située à l'extérieur de la courbe $y^2/2 + G(x) = C_1$, où $C_1 = -p^2 + Ce^{-\lambda_0}$.

Soient T_1, T_2, T_3 et T_4 les longueurs des sous-intervalles de l'intervalle $\langle 0, \lambda_0 \rangle$ pour lesquels la courbe K est située dans le premier, second, troisième ou quatrième quadrant respectivement. Or, il est facile de démontrer que, si seulement C (ou C_1 ce qui revient au même) est suffisamment grand, chacun de ces nombres doit être supérieur à $T/4$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\lambda_0 \leqslant T$. Nous nous bornerons à prouver que $T_1 > T/4$ puisque la démonstration de trois autres inégalités s'obtient de la même façon.

Il est immédiat qu'il suffit à cet effet, en supposant seulement que la fonction $p(t)$, non nécessairement périodique, satisfait à l'inégalité (12), de considérer une solution $(x(t), y(t))$ du système (11) telle que

$$x(0) = 0, \qquad y(T_1) = 0, \qquad y(t) > 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < T_1 \tag{16}$$

et, pour $x_0 = x(T_1)$, $G(x_0) \geqq C_1$. Du système (11) et de (16) il résulte que dans l'intervalle $<0, T_1>$ la fonction $x(t)$ est strictement croissante. Soit $t = t(x)$ la fonction inverse à $x(t)$ et posons $p(x) = p(t(x))$. On a évidemment

$$|p(x)| \leqslant p \qquad (0 \leqslant x \leqslant x_0). \tag{17}$$

La fonction $y(x) = y(t(x))$ $(0 \leqslant x \leqslant x_0)$ est une solution de l'équation $y\,dy/dx = -g(x) + p(x)$, et, en vertu de (17), satisfait à l'inégalité $-g(x) - p \leqslant y(x)\,y'(x)$, d'où l'on tire l'inégalité

$$\frac{1}{2}\,y^2(x) \leqslant G(x_0) - G(x) + p(x_0 - x).$$

De là et de la prémière équation du système (11) on obtient

$$T_1 = \int_0^{x_0} \frac{dx}{y(x)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{G(x_0) - G(x) + p(x_0 - x)}}.$$

Mais, en utilisant l'hypothèse (7), on démontre facilement que

$$\liminf_{x_0 \to +\infty} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{G(x_0) - G(x) + p(x_0 - x)}} = \liminf_{x_0 \to +\infty} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{G(x_0) - G(x)}}.$$

En vertu de l'hypothèse (10), il résulte que, pour C suffisamment grand, on a $T_1 > T/4$ et le Théorème 1 se trouve ainsi démontré.

5. Dans la note [3] nous avons démontré que l'inégalité (10) a pour conséquence l'inégalité $\limsup_{|x| \to \infty} G(x)/x^2 \leqslant 2\pi^2/T_0^2$ (cf. [3], Corollaire 8). D'autre part, l'inégalité (10) résulte (cf. [3], Corollaire 6) de la condition

$$\limsup_{|x| \to \infty} g(x)/x \leqslant 4\pi^2/T_0^2. \tag{18}$$

D'où et du Théorème 1 l'on obtient immédiatement le suivant.

THÉORÈME 2. *Si la fonction $g(x)$ satisfait aux conditions* (6), (7) et (18), *quelle que soit la fonction $p(t)$ périodique de période $T < T_0$ l'équation* (5) *admet au moins une solution périodique de période T.*

D'après le théorème 11 et le corollaire 8 de la note [3], la relation $\lim_{x| \to \infty} T(x) = +\infty$ est équivalente à la condition

$$\lim_{|x| \to \infty} G(x)/x^2 = 0. \tag{19}$$

On a donc le théorème suivant:

THÉORÈME. 3. *Si la fonction $g(x)$ satisfait aux conditions* (6), (7) *et* (19), *quelle que soit la fonction $p(t)$ périodique de période T, l'équation* (5) *admet au moins une solution périodique ayant la même periode.*

Supposons enfin que l'on ait les inégalités

$$\liminf_{|x| \to \infty} G(x)/x^2 \geqslant k \quad \text{et} \quad \limsup_{|x| \to \infty} G(x)/x^2 \leqslant K. \tag{20}$$

D'après le théorème 12 de la note [3], il en vient que l'inégalité (10) est alors satisfaite pour

$$T_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}} \arcsin \sqrt{\frac{k}{K}}. \tag{21}$$

On peut donc énoncer le

THÉORÈME 4. *Si la fonction $g(x)$ satisfait aux conditions* (6), (7) *et* (20), *pour toute fonction $p(t)$ périodique de période T inférieure à T_0 déterminé par* (21), *l'équanion* (5) *admet au moins une solution périodique de période T. En particulier, si* $\lim_{|x|\to\infty} G(x)/x^2 = k$ *et* $T < \pi\sqrt{2}/\sqrt{k}$, *l'équation* (5) *admet au moins une solution périodique de période T.*

6. De la démonstration du Théorème 1 il suit qu'en remplaçant l'inégalité (10) par deux inégalités suivantes

$$\liminf_{x\to+\infty} T(x) \geqslant T_0/2 \quad \text{et} \quad \liminf_{x\to-\infty} T(x) \geqslant T_0'/2 \tag{22}$$

on obtient un théorème analogue, à savoir:

THÉORÈME 5. *Si la fonction $g(x)$ satisfait aux conditions* (6), (7) *et si l'on a* (22), *pour toute fonction $p(t)$ périodique de période $T < T_0 + T_0'$, l'équation* (5) *admet au moins une solution périodique de période T.*

En remplaçant, à leur tour, les inégalités (22) par les inégalités relatives à $g(x)$ ou $G(x)$, on pourrait, de même que précédemment, en déduire des théorèmes analogues aux théorèmes 3 et 4.

INSTITUT MATHÉMATIQUE, L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)

OUVRAGES CITÉS

[1] J. Bernstein et A. Halanay, *L'index d'un point particulier et l'existence de solutions périodiques pour les systèmes au petit paramètre* (en russe), DAN SSSR, **111** (1956), 923—925.

[2] S. Lefschetz, *Differential equations*, New York, 1957.

[3] Z. Opial, *Sur les périodes des solutions de l'équation différentielle $x'' + g(x) = 0$*, Ann. Polon. Math. (à paraître).

[4] G. Seifert, *A note on periodic solutions of second order differential equations without damping*, Proc. Am. Math. Soc., **10** (1959), 396—398.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 3, 1960

MATHEMATICS

On Bases of Abstract Algebras

by

A. GOETZ and C. RYLL-NARDZEWSKI

Presented by E. MARCZEWSKI on January 21, 1960

This paper concerns such basic notions of abstract algebras as have been investigated by E. Marczewski. We follow the definitions and notations of his paper [2]. To our purpose it will be more convenient to apply the notion of independence to systems (instead of sets) of elements of an algebra. In particular, a system in which any element is repeated is, of course, a system of dependent elements.

A system of independent elements generating the whole algebra is called a *basis* of this algebra.

S. Świerczkowski proved in [3] that an algebra simultaneously possessing a basis consisting of n elements and a basis consisting of $n+1$ elements, has also a basis consisting of $n+2$ elements.

E. Marczewski raised the problem, which sets of natural numbers may occur as sets of powers of all bases of a certain algebra.

In the following we shall give a partial answer to this question.

1. THEOREM 1. *An algebra* $(A; \boldsymbol{F})$ *has a basis consisting of* n *elements if and only if the algebras* A *and* $A^{(n)}$ *are isomorphic (in symbols* $A \sim A^{(n)}$*)* *).

Proof. Let $\{a_1, ..., a_n\}$ be a basis of the algebra A. For each elements $a \in A$ there exists exactly one function $f \in A^{(n)}$ such that $f(a_1, ..., a_n) = a$ (it does exist, because the elements $a_1, ..., a_n$ generate the whole algebra; only one exists, because they are independent). It is easy to see that the mapping $a \to f$ gives the required isomorphism.

The inverse implication is evident, because the algebra $A^{(n)}$ has always a basis consisting of the n functions $e_1^n, ..., e_n^n$.

THEOREM 2. $A^{(m)} \sim A^{(n)}$ *if and only if there exist functions* $\varphi_1, ..., \varphi_n \in A^{(m)}$ *and* $\psi_1, ..., \psi_m \in A^{(n)}$, *such that*

$$\varphi_i(\psi_1, ..., \psi_m) = e_i^n \qquad i = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

$$\psi_j(\varphi_1, ..., \varphi_n) = e_j^m \qquad j = 1, 2, ..., m. \tag{2}$$

*) The theorem holds true for infinite bases, after the notions have been duly readjusted.

The functions $\varphi_1, ..., \varphi_n$ *form a basis of the algebra* $A^{(m)}$ *and the functions* $\psi_1, ..., \psi_m$ *form a basis of* $A^{(n)}$.

Proof. If $A^{(m)} \sim A^{(n)}$, then there exists in $A^{(m)}$ a basis $\varphi_1, ..., \varphi_n$. This basis generates the whole algebra $A^{(m)}$ and particularly the elements $e_1^m, ..., e_m^m$. Thus, there exist functions $\psi_1, ..., \psi_m \in A^{(n)}$ satisfying (2). There remains (1) to be proved. To be short, let us put

$$g_i = \varphi_i(\psi_1, ..., \psi_m) \; [\in A^{(n)}].$$

We have, by (2)

$$g_i(\varphi_1, ..., \varphi_n) = e_i^n(\varphi_1, ..., \varphi_n), \qquad i = 1, ..., n,$$

but $\varphi_1, ..., \varphi_n$ are independent elements of $A^{(m)}$ (being a base), so it is $g_i = e_i^n$ for $i = 1, ..., n$, and (1) is proved.

To prove the converse implication, it suffices to notice that $\varphi_1, ..., \varphi_n$ generate the whole $A^{(m)}$, and from (1) it follows immediately that these elements are independent. Theorem 2 is thus proved.

The equalities (1) and (2) simply mean that there exists a 1-1 mapping of the n-th Cartesian power A^n of A onto its m-th power A^m, which mapping is given by algebraic functions. Accordingly, we write simply

$$(\varphi_1, ..., \varphi_n)^{-1} = (\psi_1, ..., \psi_m)$$

instead of (1) and (2).

Thus, we obtain

Theorem 3. *If* $A^{(p)} \sim A^{(q)}$, *then* $A^{(p+r)} \sim A^{(q+r)}$ *for every* $r = 1, 2, ...$

We shall prove now

Theorem 4. *If* $A^{(p)} \sim A^{(q)} \sim A^{(p+r)}$, *then also* $A^{(q)} \sim A^{(q+r)}$.

Proof. Applying Theorem 2 twice, we infer the existence of the systems of functions

$$\varphi_1, ..., \varphi_{p+r} \in A^{(q)} \quad \psi_1, ..., \psi_q \in A^{(p+r)},$$
$$\lambda_1, ..., \lambda_q \in A^{(p)} \quad \mu_1, ..., \mu_p \in A^{(q)},$$

which satisfy the equalities

(3) $$(\varphi_1, ..., \varphi_{p+r})^{-1} = (\psi_1, ..., \psi_q) \quad \text{and} \quad (\lambda_1, ..., \lambda_q)^{-1} = (\mu_1, ..., \mu_p).$$

Let us set now

$$\alpha_i = \begin{cases} \lambda_i(\varphi_1, ..., \varphi_p) & \text{for} \quad i = 1, ..., q \\ \varphi_{i+p-q} & \text{for} \quad i = q+1, ..., q+r \end{cases}$$

and

$$\beta_j(x_1, ..., x_{q+r}) = \psi_j(\mu_1(x_1, ..., x_q), ..., \mu_p(x_1, ..., x_q), x_{q+1}, ..., x_{q+r}), \qquad i = 1, ..., q.$$

It is easy to verify by (3) that the condition

$$(\alpha_1, ..., \alpha_{q+r})^{-1} = (\beta_1, ..., \beta_q)$$

holds for these functions, and, consequently, by Theorem 2, the algebras $A^{(j)}$ and $A^{(q+i)}$ are isomorphic.

Theorems 1 and 4 immediately imply

THEOREM 5. *The powers of all bases of any given algebra form an arithmetic progression* *).

2. Now we consider the case of $A^{(1)} \sim A^{(n)}$. This isomorphism is, by Theorem 2, equivalent to the existence of the function $f \in A^{(n)}$ and n functions $\varphi_1, ..., \varphi_n \in A^{(1)}$ together satisfying conditions **)

$$f(\varphi_1, ..., \varphi_n) = e_1^1 \tag{4}$$

and

$$\varphi_i f = e_i^n, \quad i = 1, ..., n. \tag{5}$$

In the following we shall use the letter B to denote the algebra A or any of the algebras $A^{(s)}$ $(s = 1, 2, ...)$. We set, moreover, $d = n - 1$. We shall say that a system $S = \{a_1, ..., a_k\}$ of elements of B is in relation $\uparrow$ to the system $S' = \{b_1, ..., b_{k+d}\}$ of elements of the same algebra (in symbols $S \uparrow S'$) or that S' is obtained from S by applying the operation $\uparrow$, if

$$b_i = \begin{cases} \varphi_i(a_1) & \text{for} \quad i = 1, ..., d+1, \\ a_{i-d} & \text{for} \quad i = d+2, ..., d+k. \end{cases}$$

(the inverse relation $S' \uparrow S$ is, of course, given by formulae $a_1 = f(b_1, ..., b_n)$; $a_i = a_{i+d}$ for $i = 2, 3, ...k$, which follows from (4) and (5)).

BASIC LEMMA. *If for given systems S and S' of elements of an algebra B the relation $S \uparrow S'$ holds, then*

(i) *S is a system of independent elements if and only if the same holds for S';*

(ii) *both S and S' generate the same subalgebra;*

(iii) *S is a basis of B if and only if S' is a basis of B.*

Proof. By (4), the condition (ii) is evident, (iii) is an immediate consequence of (i) and (ii). In order to prove (i), let us suppose first that $S = \{a_1, ..., a_k\}$ is a system of independent elements, and that for some functions p and $q \in A^{(k+d)}$ the equality

$$p(\varphi_1(a_1), \varphi_2(a_1), ..., \varphi_n(a_1), a_2, ..., a_k) = q(\varphi_1(a_1), \varphi_2(a_1), ..., \varphi_n(a_1), a_2, ..., a_k)$$

holds. It follows then from the independence of the elements of S that identically

$$p(\varphi_1(x_1), ..., \varphi_n(x_1), x_2, ..., x_k) = q(\varphi_1(x_1), ..., \varphi_n(x_1), x_2, ..., x_k).$$

Substituting $f(x_1, ..., x_n)$ for x_1 and x_{i+d} for x_i $(i = 2, 3, ..., k)$, we obtain $p = q$ by (5), whence S' is a system of independent elements.

Suppose now that S' is a system of independent elements, and that, for some functions p and $q \in A^{(k)}$, $p(a_1, ..., a_k) = q(a_p, ..., a_k)$. Hence, by (4) and from the independence of the elements of S',

$$p(f(\varphi_1(x_1), ..., \varphi_n(x_1)), x_2, ..., x_k) = q(f(\varphi_1(x_1), ..., \varphi_n(x_1)), x_2, ..., x_k).$$

*) This theorem is a sharpening of a result by Świerczkowski ([3] p. 751). Another, earlier, proof of Theorem 5 will be published in a note by E. Marczewski.

**) Conditions of this kind were considered for $n = 2$ by Jónsson and Tarski [1].

Finally, by applying (4) once more we obtain $p = q$. Thus, the elements of S are independent. The Basic Lemma is proved.

THEOREM 6. *For the algebra* $(A; f, \varphi_1, ..., \varphi_n)$, *where the functions* $f(x_1, ..., x_n)$ *and* $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ *satisfy* (4) *and* (5), *the powers of bases of the algebra* $\boldsymbol{A}^{(1)}$ *are of the form* $1+sd$ $(s = 0, 1, 2, ...)$.

We obtain such an algebra by taking, e.g. for A, the set of natural numbers, for f a 1—1 mapping of the n-th Cartesian power A^n of A onto A and for $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ the inverse mapping.

Proof. We have $\boldsymbol{A}^{(1)} \sim \boldsymbol{A}^{(1+d)}$ and thus, by Theorem 4, there exist bases of $\boldsymbol{A}^{(1)}$ of each power of the form $1+sd$; it remains to prove that there is no basis of any other power.

Denote by Φ the class of all algebraic functions of one variable of the form

$$\varphi_{i_1}\varphi_{i_2}\cdots\varphi_{i_k} \qquad (k = 0\ 1, 2, ...). \tag{6}$$

It is not difficult to prove, by means of Basic Lemma (iii), that from any basis S of $\boldsymbol{A}^{(1)}$ we can obtain, by applying the operation $\uparrow$ (and permutations of elements) a finite number of times, such a basis S', that every element of it belongs to Φ.

It is also easy to notice that by further application of the same process a finite number of times we can obtain a *homogeneous basis* S'', i.e. a basis whose all elements are of the form (6) with the same $k = k_0$. Further, the system S''' of all functions of the form (6) with $k = k_0$ is also a basis (by (iii)). A proper part of a basis cannot be a basis itself, and consequently $S'' = S'''$ and consists of $n^{k_0} = (1+d)^{k_0}$ elements. We remark now (and this is essential) that by applying the operation $\uparrow$ to a system S we add to the system d elements. It follows successively from this that the numbers of elements of the systems S''', S'', S' and finally of S itself are numbers of the form $1+ld$.

Remark. By applying operations $\uparrow$, $\downarrow$ and permutations, every basis of $\boldsymbol{A}^{(1)}$ may be obtained from any given basis. Moreover, in this algebra every system of independent elements may be extended to a basis.

THEOREM 7. *For any pair of natural numbers* k *and* d, $k < 1+d = n$, *there exists such an algebra that the powers of all its bases form the progression*

$$k+sd, \qquad s = 0, 1, 2, ... \tag{7}$$

Proof. We shall consider the algebra $(A; f, \psi_1, ..., \psi_n)$ of Theorem 6, and shall prove that the corresponding algebra $\boldsymbol{A}^{(k)}$ has the required property. It has a basis $(e_1^k, ..., e_k^k)$ of power k and consequently, by Basic Lemma (iii), each number of progression (7) is a power of some basis. Let us suppose that there exists a basis of $\boldsymbol{A}^{(k)}$ consisting of r_1 elements, where r_1 does not belong to (7). Since $k < 1+d$ and since the numbers

r_1+ld $(l=0,1,...)$ are also powers of bases of $A^{(k)}$, there exists, by Theorem 5, a basis of $A^{(k)}$, whose power r_2 satisfies

$$k<r_2<k+d. \tag{8}$$

Thus, by Theorem 2, $A^{(k)} \sim A^{(r_2)}$, and by Theorem 3,

$$A^{(n)} = A^{(k+(n-k))} \sim A^{(r_2+(n-k))}.$$

Consequently the number r_2+n-k would be the power of a basis of $A^{(1)} \sim A^{(n)}$ in spite of Theorem 6 and inequality (8). The proof is thus complete.

We do not know if the condition $k<1+d$ of Theorem 7 is essential, in other words if every given arithmetical progression may be obtained as a set of powers of all bases of a certain algebra.

3. An element a of an algebra is called self-dependent if the one-element system $\{a\}$ is a system of dependent elements.

THEOREM 8. *If there exists simultaneously a basis consisting of one element and a basis consisting of $n>1$ elements of the algebra A, then for every natural number k there exists in A a minimal system of generators of the whole A consisting of k self-dependent elements.*

Proof. We can assume $k \leqslant n$, obviously, $A \sim A^{(1)} \sim A^{(n)}$ and consequently there exist functions f and $\varphi_1, ..., \varphi_n$ satisfying (4) and (5). Let $\{a\}$ be the one-element basis of A; hence the elements $b_i = \varphi_i(a)$, $i=1,2,...,n$ form a n-element basis.

The element $c=f(a,a,...,a)$ generates, of course, the whole algebra, because $\varphi_1(c)=a$ and it is self-dependent in consequence of the Basic Lemma (i).

For any natural number k, $1<k \leqslant n$, the elements

$$\begin{aligned} c_1 &= f(b_{k+1}, ..., b_n, b_1, ..., b_1), \\ c_2 &= f(b_{k+1}, ..., b_n, b_2, ..., b_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_k &= f(b_{k+1}, ..., b_n, b_k, ..., b_k), \end{aligned}$$

form a system of k generators (by Basic Lemma (ii)) of the whole algebra. These elements are self-dependent (by (i)), and it is easy to see that the system $\{c_1, ..., c_k\}$ is also a minimal system generating the whole algebra.

INSTITUTE OF MATHEMATICS. WROCŁAW BRANCH. POLISH ACADEMY OF SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, ODDZIAŁ WROCŁAW, PAN)

REFERENCES

[1] B. Jónsson and A. Tarski, *Two general theorems concerning free algebras*, Bull. Amer. Math. Soc., **62** (1956), 554.

[2] E. Marczewski, *A general scheme of the notions of independence in mathematics*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys., **6** (1958), 731—736.

[3] S. Świerczkowski, *On independent elements in finitely generated algebras*, ibid., **6** (1958), 749—752.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 3, 1960

MATHEMATICS

Integration of Differential Equations with Unbounded Operators in Abstract (*L*)-Spaces

by

W. MLAK

Presented by T. WAŻEWSKI on January 22, 1960

We will consider a certain method of integration of the equation

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x \tag{1}$$

in the abstract (*L*)-space E [3]. We need essentially the assumption that the positive cone $S = E\{x \geqslant \Theta\}$ is closed and the order relation defined by $x \leqslant y \overset{\text{df}}{\iff} y - x \in S$ has the following property (see [3], lemma 3.2):

(2) *Suppose that* $x \leqslant x_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *and let there exist an* x *such that* $x_n \leqslant x$ *for all* n. *Then the sequence* x_n *tends (strongly) to a limit, i.e. there is* x_0 *such that* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$.

For other properties of (*L*)-spaces see [3].

1. In what follows we suppose that $A(t)$ $(t \in [0, a])$ are infinitesimal generators of semi-groups of linear operators and for $\varepsilon > 0$ and $t \in [0, a]$ the inequality $|(I - \varepsilon A(t))^{-1}| \leqslant 1$ holds.

Define now $I_\varepsilon(t) = (I - \varepsilon A(t))^{-1}$. We shall use the following assumptions:

(3) *For every* $\varepsilon > 0$ *and every* $t \in [0, a]$ $0 \leqslant I_\varepsilon(t) \leqslant I$ *that is* $\Theta \leqslant I_\varepsilon(t)\,x \leqslant x$ *for* $x \geqslant \Theta$.

(4) *The intersection* $D = S \cap \bigcap D[A(t)]$ *is dense in* S.

(5) *For every* $x \in E$ *the function* $x(t) = I_\varepsilon(t)\,x$ $(\varepsilon > 0)$ *is (strongly) continuous in* t.

Note that the results of the next section are true in an arbitrary Banach space with a semi-order relation defined by a closed positive cone.

2. Let $A(t)$ be an infinitesimal generator of a semi-group and let $|(I-\varepsilon A(t))^{-1}|\leqslant 1$. $A(t)$ is closed and densely defined.

The formula

$$A(t)x=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{I_\varepsilon(t)-I}{\varepsilon}x$$

suggests the construction of the solution of (1) as a limit of solutions of approximate equations

$$x'=A(t)I_\varepsilon(t)x. \tag{6}$$

Such a method has been used by Yosida [5] in the case of concrete (L)-space; in [5] the separability of that (L)-space has been used and some compactness properties were considered. To begin with, we formulate an elementary lemma:

LEMMA 1. *Let $I_\varepsilon(t)$ satisfy* (5) *and let be $|I_\varepsilon(t)|\leqslant 1$. Then there exists an operator-valued function $U_\varepsilon(t,s)$ such that the following properties hold:*

$$|U_\varepsilon(t,s)|\leqslant 1 \qquad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant a, \tag{7}$$

$$U_\varepsilon(t,s) \text{ is strongly continuous in } (t,s), \tag{8}$$

$$U_\varepsilon(t,s)U_\varepsilon(s,u)=U_\varepsilon(t,u) \quad \text{for} \quad 0\leqslant u\leqslant s\leqslant t \quad \text{and} \quad U_\varepsilon(t,t)=I, \tag{9}$$

$$\frac{\partial U_\varepsilon(t,s)x}{\partial t}=A(t)I_\varepsilon(t)U_\varepsilon(t,s)x, \qquad x\in E,\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant a, \tag{10}$$

$$\frac{\partial U_\varepsilon(t,s)x}{\partial s}=-U_\varepsilon(t,s)A(s)I_\varepsilon(s)x, \qquad x\in E,\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant a. \tag{11}$$

LEMMA 2. *Suppose that $\Theta \quad I_\varepsilon(t) \quad I$. Then $\left|e^{\tau\frac{I_\varepsilon(t)\quad I}{\varepsilon}}\right|$ is a positivity preserving semi-group.*

Proof. It is sufficient to prove (see [2], th. 11.7.2) that the resolvent $R(\lambda, A(t)I_\varepsilon(t))$ is positive for sufficiently large λ. The operator $A(t)I_\varepsilon(t)$ is bounded. Hence,

$$e^{\tau\frac{I_\varepsilon(t)\quad I}{\varepsilon}}=\sum_{n\,0}\frac{(I_\varepsilon(t)-I)^n\tau^n}{\varepsilon^n n!} \tag{12}$$

and the series is absolutely convergent in the uniform operator topology. On the other hand

$$R\left(\lambda,\frac{I_\varepsilon(t)-I}{\varepsilon}\right)x=\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}e^{\tau\frac{I_\varepsilon(t)\,I}{\varepsilon}}x\,d\tau \tag{13}$$

for sufficiently large λ. Applying the formula

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\tau^n\,d\tau=\frac{n!}{\lambda^{n+1}}$$

we get from (12) and (13)

$$R\left(\lambda, \frac{I_\varepsilon(t)-I}{\varepsilon}\right)x = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(I_\varepsilon(t)-I)^n}{\varepsilon^n\lambda^n}x = \tag{14}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(I_\varepsilon(t)-I)^{2n}}{\varepsilon^{2n}\lambda^{2n}}\left(I+\frac{I_\varepsilon(t)-I}{\varepsilon\lambda}\right)x \qquad \left(\left(\frac{I(t)-I}{\varepsilon}\right)^0 \overset{\text{df}}{=} I\right).$$

The operator $\dfrac{(I_\varepsilon(t)-I)^{2n}}{\varepsilon^{2n}\lambda^{2n}}$ is positive. If $\dfrac{1}{\lambda} \leqslant \varepsilon$, then $\Theta \leqslant I + \dfrac{I_\varepsilon(t)-I}{\varepsilon\lambda}$.

If follows now from (14) that the resolvent of $\dfrac{I_\varepsilon(t)-I}{\varepsilon}$ is positive for λ sufficiently large and $\lambda > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Applying arguments similar to those used in [1] (see lemma 7.1) it is easy to show that

$$U_\varepsilon(t,s)x = \lim \prod_{\substack{\max|u_{i+1}-u_i|\to 0 \\ s=u_0<u_1<\ldots<u_n=t}} e^{(u_{i+1}-u_i)\frac{I_\varepsilon(U_i)-I}{\varepsilon}}x, \tag{15}$$

wherever (5) holds. From Lemma 2 and (15) follows

LEMMA 3. *Let (3) and (5) be satisfied. Then the operator-valued function $U_\varepsilon(t,s)$ of Lemma 1 is positive, i.e.*

$$U_\varepsilon(t,s)x \geqslant \Theta \quad \text{for} \quad x \in S \quad \text{and} \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \alpha. \tag{16}$$

The assumption (3) implies that $A(t)x \leqslant \Theta$ for $x \in D$. On the other hand, the first resolvent equation shows that $\partial I_\varepsilon(t)/\partial\varepsilon = A(t)I_\varepsilon^2(t)$. But $I_\varepsilon(t)$ is positive. We conclude therefore that

$$I_\varepsilon(t) \leqslant I_\eta(t) \quad \text{for} \quad 0 < \eta < \varepsilon. \tag{17}$$

By (17) we have

$$A(t)I_\eta(t) \leqslant A(t)I_\varepsilon(t) \quad 0 < \eta < \varepsilon. \tag{18}$$

Applying (3), (11), (16), (18) and theorem 1 of [4] the following is easily proved:

LEMMA 4. *If $0 < \eta < \varepsilon$ and $x \geqslant \Theta$, then*

$$\Theta \leqslant U_\eta(t,s)x \leqslant U_\varepsilon(t,s)x \leqslant x \quad \text{for} \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \alpha. \tag{19}$$

3. Let E be an abstract (L)-space. We shall prove the following

THEOREM. *Let $I_\varepsilon(t)$ satisfy conditions (3), (4) and (5). Suppose that for $x \in D$ the real valued function $|A(t)x|$ is summable over $[0, \alpha]$. Then there exists an operator-valued function $U(t,s)$ such that the following properties hold:*

$$\Theta \leqslant U(t,s) \leqslant I \quad \text{for} \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \alpha, \tag{20}$$

$$|U(t,s)| \leqslant 1, \tag{21}$$

(22) $U(t,s)$ *is strongly continuous in* (t,s),

(23) $U(t,s)\,U(s,u)=U(t,u)$ *for* $0\leqslant u\leqslant s\leqslant t$ *and* $U(t,t)=I$,

(24) $U(t,s)\,x\in D[A(t)]$ *for* $x\in D[A(t)]\cap S$ *and* $s\leqslant t$,

(25) $$\frac{\partial U(t,s)\,x}{\partial t}=A(t)\,U(t,s)\,x$$ *for* $x\in D$ *and for almost all* $t\in(s,a)$,

(26) $$\frac{\partial U(t,s)\,x}{\partial s}=-U(t,s)\,A(s)\,x$$ *for* $x\in D$ *and for almost all* $s\in(0,t)$.

Proof. Define $U_{1/n}(t,s)=U_n(t,s)$, $I_{1/n}(t)=I_n(t)$. From (19) of Lemma 4 and from (2) it follows that the limit $\lim_{n\to\infty}U_n(t,s)\,x \overset{\text{df}}{=} U(t,s)\,x$ exists for $x\geqslant\Theta$ and satisfies (20). Let x be an arbitrary element of E. It is known that [3] $x=x^+-x^-$, where $x^+=\max(x,0)$, $x^-=\max(-x,0)$ and $|x|=|x^+|+|x^-|$. $U(t,s)$ is defined for $x\geqslant\Theta$. We extend it by formula $U(t,s)\,x=U(t,s)\,x^+-U(t,s)\,x^-$. Relation (20) implies that $|U(t,s)\,x|\leqslant|x|$ for $x\geqslant\Theta$. Hence, we have $|U(t,s)\,x|=|U(t,s)\,x^+-U(t,s)\,x^-|\leqslant|U(t,s)\,x^+|+|U(t,s)\,x^-|\leqslant|x^+|+|x^-|=|x|$ and (21) is proved.

It follows from (18) that

(27) $$A(t)\,I_{n+1}(t)\,U_m(t,s)\,x\leqslant A(t)\,I_n(t)\,U_m(t,s)\,x \quad \text{for} \quad x\geqslant\Theta$$

(m,n arbitrary). By (3) and (19) $\Theta\leqslant I_n(t)\,U_m(t,s)\leqslant I$. But $A(t)\,z\leqslant\Theta$ for $z\in D$. Hence, we obtain

(28) $$A(t)\,x\leqslant A(t)\,I_n(t)\,U_m(t,s)\,x\leqslant\Theta, \quad x\in D[A(t)], \quad x\geqslant\Theta.$$

Now it follows from (27) and (28) that

(29) $$A(t)\,x\leqslant A(t)\,I_{n+1}(t)\,U_m(t,s)\,x\leqslant A(t)\,I_n(t)\,U_m(t,s)\,x$$

for $x\in D[A(t)]$, $x\geqslant\Theta$. Hence, by (2), we conclude that the limit $\lim_{n\to\infty}A(t)\,I_n(t)\,U_m(t,s)\,x$ exists. The operator $A(t)$ is closed and $\lim_{n\to\infty}I_n(t)\,U_m(t,s)\,x=U_m(t,s)\,x$. Hence, we have $U_m(t,s)\,x\in D[A(t)]$ for $x\geqslant\Theta$, $x\in D[A(t)]$ and m arbitrary, and consequently

(30) $$\frac{\partial U_m(t,s)\,x}{\partial t}=I_m(t)\,A(t)\,U_m(t,s)\,x.$$

It should be remarked now that (19) implies

(31) $$A(t)\,U_m(t,s)\,x\leqslant A(t)\,U_{m+1}(t,s)\,x\leqslant\Theta.$$

Hence, we get that the limit $\lim_{m\to\infty}A(t)\,U_m(t,s)\,x$ exists for $x\in S\cap D[A(t)]$. But $U_m(t,s)\,x\to U(t,s)\,x$ and $A(t)$ is closed. Thus, $U(t,s)\,x\in D[A(t)]$ holds for $x\in S\cap D[A(t)]$ and (24) is proved. It follows from (28) ($m=n$) and (30) that

(32) $$|I_m(t)\,A(t)\,U_m(t,s)\,x|\leqslant|A(t)\,x| \quad x\in S\cap D[A(t)].$$

By (30) we get

$$U_m(t_2, s)\,x - U_m(t_1, s)\,x = \int_{t_1}^{t_2} I_m(\tau)\,A(\tau)\,U_m(\tau, s)\,x\,d\tau, \tag{33}$$

From (32), (33) and from the Lebesgue theorem applied to the Bochner integral (see [2], th. 3.7.9) we have

$$U(t_2, s)\,x - U(t_1, s)\,x = \int_{t_1}^{t_2} A(\tau)\,U(\tau, s)\,x\,d\tau \tag{34}$$

for $x \in D$, and (25) is proved. Using similar arguments one proves easily the relation (26). Relations (23) follow from (9) of Lemma 1. By (26) we get

$$U(t, s)\,x = x - \int_{t}^{s} U(t, \tau)\,A(\tau)\,x\,d\tau. \tag{35}$$

It follows from (34) and (35) that $U(t, s)$ is continuous in (t, s) for $x \in D$. On the other hand $|U(t, s)| \leqslant 1$ and for each $x \in E$ there exist two sequences $y_n \in D$, $z_n \in D$ such that $y_n \to x^+$, $z_n \to x$. This completes the proof of (22).

Remark. Our results may be applied to linear differential equations with time-dependent coefficients, provided that the case of constant coefficients may be completely characterized by means of the semi-group theory. As an example may serve here the denumerable system of differential equations:

$$x_i'(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(t)\,x_j(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{36}$$

considered in $E = (l)$. The point of departure is the theory developed in [6]. A suitable contraction of the matrix operator $(a_{ij}(t))$ corresponds to $A(t) : U(t, s)$, defines the matrix $(u_{ij}(t, s))$ and the solution of (36) is given by the formula

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij}(t, s)\,x_j(s).$$

The matrix $b_{ji} = a_{ij}$ becomes the Kolmogoroff matrix, the matrix $p_{ij} = u_{ji}$ satisfies the system of Kolmogoroff's equations for Markoff processes with denumerable number of possible states. The process is non-homogeneous in time.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)

REFERENCES

[1] C. Foiaş, G. Gussi et V. Poenaru, *Sur les solutions généralisées de certaines équations linéaires et quasi-linéaires dans l'espace de Banach*, Rev. de Math. Pure et Appl., **3** (1958), 283—304.

[2] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Providence, 1957.

[3] S. Kakutani, *Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem*, Ann. of Math., **42** (1941), 523—537.

[4] W. Mlak, *Differential inequalities with unbounded operators in Banach spaces* (to appear in Annales Pol. Math.).

[5] K. Yosida, *Semi-group theory and the integration problem of diffusion equations*, Proc. Intern. Congr. Math. 1954, Amsterdam, 1957, vol. I, 405—420.

[6] T. Kato, *On the semi-groups generated by Kolmogoroff's differential equations*, Jour. Math. Soc. Japan, **6** (1954), 1—15.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 3, 1960

MATHEMATICS

An Application of the Method of Complex Functions to a Proof of Kakutani's Theorem

by

J. W. JAWOROWSKI

Presented by K. KURATOWSKI on January 23, 1960

1. S. Eilenberg and K. Kuratowski have developed a method of investigating a space by considering its continuous mappings into the plane of complex numbers different from zero. It is based on examining a complex non-vanishing function as to whether or not it has a continuous branch of logarithm. This method enables us to prove in a simple and elementary way certain topological theorems concerning the plane or two-dimensional sphere. Professor Kuratowski asked whether this method could be applied to a proof of Kakutani's theorem on real-valued functions on the two-dimensional sphere (see below). The aim of this note is to give such a proof of Kakutani's theorem stating as follows.

KAKUTANI'S THEOREM. *Let f be a real continuous function defined on the unit two-dimensional sphere S^2 and let a_0, a_1, a_2 be vertices of a fixed equilateral triangle on S^2. Then there exists a rotation h of S^2 such that $f(h(a_0)) = f(h(a_1)) = f(h(a_2))$.*

This theorem was originally proved by S. Kakutani for the case when a_0, a_1, a_2 are end points of an orthogonal set of three vectors, extended by de Mira Fernandes [6] for any equilateral triangle a_0, a_1, a_2 and, finally, generalized by E. E. Floyd to the case of an arbitrary triangle a_0, a_1, a_2. Our proof concerns therefore only a special case of Floyd's known theorem. The question whether the same method can be applied to prove Floyd's theorem in its general form, is open.

Another simple proof of Kakutani's theorem has been given recently by K. Sieklucki [7]. See also reference 2 in Floyd's paper [3].

2. Let a_0, a_1, a_2 be vertices of a fixed equilateral triangle on S^2 and let R be the set of all ordered triples $p_0, p_1, p_2 \in S^2$ obtained from a_0, a_1, a_2 by a rotation of the sphere with natural topology. Since any triple $(p_0, p_1, p_2) \in R$ determines a rotation h of S^2 such that $h(a_i) = p_i$, for $i = 0, 1, 2$, hence the space R is homeomorphic with the group of ro-

tations of S^2, i.e. with the three-dimensional projective space [8]. It follows that R is *connected* and *locally connected*. It is also *unicoherent*, since its 1-dimensional Betti number is zero [1], [2].

3. Let f be a real continuous function defined on S^2 and suppose that, for every triple $r = (p_0, p_1, p_2) \in R$, either $f(p_1) \neq f(p_0)$ or $f(p_2) \neq f(p_0)$. Consider the mapping g of R into the Euclidean 3-space $\mathcal{E}^3$ defined by

$$g(p_0, p_1, p_2) = (x, y, z), \tag{1}$$

where

$$x = f(p_0) - f(p_1), \quad y = f(p_1) - f(p_2), \quad z = f(p_2) - f(p_0).$$

Thus g maps the space R into the plane in $\mathcal{E}^3$ with the equation $x+y+z = 0$ and does not assume the origin as a value. Therefore, f may be considered as a mapping of R into the set $\mathcal{P}_2$ of complex numbers different from zero:

$$g : R \to \mathcal{P}_2. \tag{2}$$

Since the space R is unicoherent and locally connected, the complex non-vanishing function g admits a continuous branch of logarithm (see [5], p. 336, 3), i.e., there exists a mapping φ of R into the plane $\mathcal{E}^2$ of complex numbers such that

$$g(r) = e^{\varphi(r)}, \quad \text{for every} \quad r \in R. \tag{3}$$

Consider now the periodic homeomorphism $\alpha : R \to R$ of order 3 defined by $\alpha(p_0, p_1, p_2) = (p_2, p_0, p_1)$. Notice that the permutation α induces the permutation $(x, y, z) \to (z, x, y)$ of co-ordinates in (1). If we then regard g as the mapping (2) into the plane of complex numbers, it follows that the functions g and $g\alpha$ differ by a rotation of the plane about the origin through the angle $\frac{2}{3}\pi$. Therefore, by (3), we have

$$g(\alpha(r)) = e^{\varphi(r) + \frac{2}{3}\pi}. \tag{4}$$

On the other hand,

$$g(\alpha(r)) = e^{\varphi(\alpha(r))}. \tag{5}$$

Comparing (4) and (5), we obtain that

$$\varphi(\alpha(r)) = \varphi(r) + \frac{2}{3}\pi + 2k\pi,$$

where k is an integer. The function

$$\delta(r) = \varphi(\alpha(r)) - \varphi(r) = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \tag{6}$$

is continuous and, since R is connected and k is an integer, it must be constant. Therefore,

$$\delta(\alpha(r)) = \varphi(\alpha^2(r)) - \varphi(\alpha(r)) = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \tag{7}$$

$$\delta(a^2(r)) = \varphi(r) - \varphi(a^2(r)) = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi. \tag{8}$$

Adding (6), (7) and (8) by sides, we obtain a contradiction:

$$0 = 3k + 1.$$

Hence, our proof is finished.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)

REFERENCES

[1] P. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie*, Berlin, 1935, p. 265.

[2] K. Borsuk, *Über die Abbildungen der metrischen kompakten Räumen auf die Kreislinie*, Fund. Math., **20** (1933), 230.

[3] E. E. Floyd, *Real-valued mappings of spheres*, Proc. A. M. S., (1956), 957—959.

[4] S. Kakutani, *A proof that there exists a circumscribing cube around any convex set in R^3*, Ann. of Math., **43** (1942), 739—741.

[5] C. Kuratowski, *Topologie II*, Warszawa—Wrocław, 1950.

[6] De Mira Fernandes, *Funzioni continue sopra una superficie sferica*, Portug. Math., **5** (1946), 132—134.

[7] K. Sieklucki (unpublished paper).

[8] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton, 1951,

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 3, 1960

MATHEMATICS

A Theorem on Quasi-Ordered Division Algebras

by

W. ZAWADOWSKI

Presented by A. MOSTOWSKI on January 25, 1960

The aim of this paper is to prove that any bounded quasi-ordered division algebra with positive identity element e is isomorphic with the field of real numbers, and to show some consequences.

An arbitrary algebraic ring R, in general not commutative, is said to be *quasi-ordered* (see [1], p. 4), if there is in R a relation $\leqslant$ that satisfies the following conditions:

I. $x \leqslant x$ *for each* $x \in R$,
II. $x \leqslant y$, $y \leqslant z$ *implies* $x \leqslant z$,

and this is compatible with the algebraic structure of R:

III. *for each* a, $x \leqslant y$ *implies* $x+a \leqslant y+a$,
IV. *for each* $a \geqslant 0$, $x \leqslant y$ *implies* $ax \leqslant ay$, $xa \leqslant ya$.

Such relation of quasi-ordering can always be defined with the aid of a positive cone P satisfying

(i) $0 \in P$,
(ii) $a, b \in P$ implies $a + b \in P$, $ab \in P$,

setting $a \leqslant b$ if and only if $b - a \geqslant 0$.

We say that the element x is non-negative, if $x \geqslant 0$, and we say that it is *positive*, $x > 0$, if $x \geqslant 0$ and the converse relation $x \leqslant 0$ does not hold. We always assume that R has the identity that is positive. The element a is *bounded*, if there is a natural number n such that $a \leqslant ne$ and $-a \leqslant ne$. The ring R is *bounded*, if all its elements are bounded. R is called *archimedean*, if for every element $a \in R$

$$e + na \geqslant 0 \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad \text{implies} \qquad a \geqslant 0.$$

A quasi-ordered ring is called a *quasi-ordered algebra*, if it is an algebra over the reals in the usual algebraic sense, and for each real number λ and each element $a \in R$

$$\lambda \geqslant 0, \qquad a \geqslant 0 \qquad \text{implies} \qquad \lambda a \geqslant 0.$$

Likewise we define a quasi-ordered algebra over the rationals.

An element $a \in R$ is called an *infinitesimal*, if there exists a natural number m such that $me \pm na \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$. The set of all infinitesimals of a bounded quasi-ordered ring R is a two-sided ideal which is called the *radical* of R, rad R. If rad $R = \{0\}$, then $\leqslant$ is a partial ordering.

LEMMA 1. *Let R be a bounded quasi-ordered ring with positive identity. The real valued function*

$$\|x\| = \inf\left\{\frac{m}{n} : \pm nx \leqslant me\right\}, \tag{1}$$

where m, n are natural numbers $\geqslant 1$, has the properties

a. $\|x\| \geqslant 0$,

b. $\|e\| = 1$,

c. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$,

d. $\|xy\| \leqslant \|x\| \, \|y\|$,

e. $\|mx\| = |m| \, \|x\|$, *where m is an integer,*

f. $\|x\| = 0$ *if and only if* $x \in \operatorname{rad} R$,

g. *if R is an archimedean quasi-ordered algebra then, for each* $x \in R$, $\|x\| e \pm x \geqslant 0$.

h. *if R satisfies the following two conditions,*

1. *for every* $a \in R$ $a^2 \geqslant 0$,

2. *for every* $a \in R$ $2a \geqslant 0$ *implies* $a \geqslant 0$,

then $\|x^2\| = \|x\|^2$.

Proof. We only give a hint as regards d. the other points are evident. Let $|x| \leqslant m/n$, $|y| \leqslant m'/n'$. This means that $\pm nx \leqslant me$ and $\pm n'y \leqslant m'e$. Adding up the inequalities $0 \leqslant (me - nx)(m'e + n'y)$, $0 \leqslant (me + nx)(m'e - n'y)$, we obtain $nn'xy \leqslant mm'e$. Likewise, from $0 \leqslant (me + nx)(m'e + n'y)$, $0 \leqslant (me - nx)(m'e - n'y)$, we obtain $-nn'xy \leqslant mm'e$, and, hence, $|xy| \leqslant mm'/nn'$, and finally due to the fact that rationals are lying dense in the reals, we have $\|xy\| \leqslant \|x\| \, \|y\|$.

LEMMA 2. *Let R be a bounded quasi-ordered algebra over the rationals with positive identity e. If $a \geqslant 0$ and a^{-1} exists, then there is a natural m such that*

$$n \geqslant m \quad \text{implies} \quad a - \frac{e}{n} \geqslant 0.$$

Proof. Since a^{-1} is bounded, it follows that there is an m such that $n \geqslant m$ implies $n - a^{-1} \geqslant 0$; multiplying by a, we have $na - e \geqslant 0$.

LEMMA 3. *If R is a bounded archimedean quasi-ordered algebra with positive identity, then for each $a \in R$ the element $\|a\|^2 e - a^2$ has no inverse.*

Proof. If $\|a\|^2 e - a^2$ had an inverse, then the elements $\|a\| e - a$ and $\|a\| e + a$ would have inverses, too, and by Lemma 2 there would be an n such that

$$\|a\| e - a - \frac{e}{n} \geqslant 0 \quad \text{and} \quad \|a\| e + a - \frac{e}{n} \geqslant 0,$$

and by a straightforward calculation we would obtain

$$-\left(\|a\| - \frac{1}{n}\right) e \leqslant a \leqslant \left(\|a\| - \frac{1}{n}\right) e,$$

in spite of (1).

THEOREM 1. *If R is a bounded quasi-ordered division algebra with positive identity, then R is isomorphic to the field of real numbers.*

Proof. We first extend the relation $\leqslant$ setting

$$a \geqslant^* 0 \quad \text{if and only if} \quad a + \frac{1}{n} e \geqslant 0 \quad \text{for} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Since

$$\text{(i)} \quad 0 + \frac{1}{n} e \geqslant 0 \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

and

$$\text{(ii)} \quad a + \frac{1}{n} e \geqslant 0 \quad n = 1, 2, \ldots \quad \text{and} \quad b + \frac{1}{m} e \geqslant 0 \quad m = 1, 2, \ldots$$

imply

$$(a + b) + \frac{m+n}{mn} e \geqslant 0, \quad \text{and} \quad ab + \frac{nM + mN + 1}{nm} e = ab + \frac{M}{n} e +$$

$$+ \frac{N}{n} e + \frac{1}{mn} e \geqslant ab + \frac{1}{m} a + \frac{1}{n} b + \frac{1}{mn} e \geqslant 0,$$

where M and N are such naturals that $\pm a \leqslant Me$, $\pm b \leqslant Me$, $\pm b \leqslant Ne$, it is easy to see that $\leqslant^*$ is a relation of quasi-ordering which is compatible with the algebraic structure of R. The identity e is positive, and furthermore, this new relation is archimedean.

By Lemma 1 f. $\|a\|^* = 0$ if and only if $a = 0$, for the only two-sided ideal in R is $\{0\}$. By Lemma 3 $\|a\|^* e - a^2$ has no inverse, and hence either $a = \|a\|^* e$, or $a = -\|a\|^* e$, which establishes an isomorphism of E into the reals. Since R is an algebra, this isomorphism is onto, and the both relations $\leqslant$ and $\leqslant^*$ coincide with the usual order of the real numbers.

We say that a quasi-ordered ring R with positive identity e is *closed under the adjunction of bounded inverses*, if $a \geqslant 0$ implies $(e+a)^{-1} \in R$.

Let R be a quasi-ordered algebra satisfying this condition. A homomorphism φ of R into the field of real numbers is *positive*, if $a \geqslant 0$ implies $\varphi(a) \geqslant 0$. It is easy to see that any homomorphism φ is positive if and only if it is continuous in the norm (1) and further that each homo-

morphism into the reals is both positive and continuous. It also readily follows that for each positive homomorphism $|\varphi(x)| \leqslant |x|$.

COROLLARY 1. *Let R be a bounded quasi-ordered algebra with positive identity, that is closed under the adjunction of bounded inverses. To each $a \in R$ such that $\|a\| \neq 0$, there exists a positive homomorphism φ onto the field of real numbers, such that $\varphi(a^2) = \|a\|^2$.*

Proof. If M is a maximal two-sided ideal of R, then R/M with natural quasi ordering,

$a(M) \geqslant 0$, *if there exists an* $m \in M$ *such that* $a+m \geqslant 0$,

is a quasi ordered division algebra with positive identity. Indeed, from $e(M) \leqslant 0$, i.e. $e+m \leqslant 0$, where $m \in M$, it would follow that $e \leqslant -m$, and since R was assumed to be closed under the adjunction of bounded inverse, m would have an inverse, in spite of that it belongs to M. R is therefore isomorphic to the reals. If $\|a\| \neq 0$, then, by Lemma 3 and Zorn lemma, $a^2 - \|a\|^2 e$ is contained in at least one maximal two-sided ideal.

With the same assumptions about R as in Corollary 1 and as, a direct consequence of this Corollary we have

COROLLARY 2. (cf. [3]). *If* rad $R = \{0\}$, *then R is isomorphic to an algebra of continuous functions $a(\varphi)$ on the set Φ of all positive homomorphism of R onto the reals, which is a compact topological space with*

$$U(\varphi_0 : a_1, a_2, \ldots, a_k, \varepsilon) = \{\varphi : |a_i(\varphi) - a_i(\varphi_0)| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots\}$$

as a basis of open sets in Φ. Moreover, we have

1. $\|a\| = \sup\{|a(\varphi)| : \varphi \in \Phi\}$,
2. $a(\varphi) \geqslant 0$ *for all* $\varphi \in \Phi$ *if and only if* $a \geqslant 0$,
3. $a^{-1} \in R$ *if and only if* $a(\varphi) \neq 0$ *for all* $\varphi \in \Phi$.

Sketch of the proof: To begin with, we prove the first part of the theorem on functional representation, and then proceed as follows: 1. is a consequence of $|\varphi(x)| \leqslant x\|$ and Corollary 1. Proof of 2. Let $\varphi(a) \geqslant 0$ for all $\varphi \in \Phi$, and $a \leqslant ne$, where n is a natural. We have $\varphi(ne-a) = n - \varphi(a) \leqslant n$ and hence $\sup\{\varphi(ne-a) : \varphi \in \Phi\} \leqslant n$. Since φ's are positive homomorphisms and $ne-a \geqslant 0$, it follows that $\varphi(ne-a) \geqslant 0$ for all $\varphi \in \Phi$. Therefore, in virtue of 1.

$$\|ne - a\| = \sup\{|\varphi(ne-a)| : \varphi \in \Phi\} = \sup\{\varphi(ne-a) : \varphi \in \Phi\} \leqslant n,$$

and it follows from the definition of the norm (1) that $ne-a \leqslant ne$, hence $a \geqslant 0$. Proof of 3. If a^{-1} exists, then, in virtue of the functional representation that has just been established in the first part of the theorem, $a(\varphi) \neq 0$. If $a(\varphi) \neq 0$ for all $\varphi \in \Phi$, then, since Φ has been already proved compact, $a^2(\varphi) \geqslant \alpha > 0$, and since R is closed under the adjunction of bounded inverses, a^2 belongs to R and so do $a^{-1} = a\,a^{-2}$.

COROLLARY 3. *If R is an archimedean partially ordered algebra with positive identity, that is bounded and closed under the adjunction of bounded inverses, then R is commutative.*

THEOREM 2. *Any bounded qausi-ordered field that is linear over the rationals and of which the identity element e is positive is isomorphic to a subfield of the field of real numbers.*

Proof. By the same argument as before we can extend the relation Σ to an archimedean one. We assume that Σ is already this extended relation.

Since R is a field and the set $\{a : \|a\| = 0\}$ is an ideal, it is the zero ideal. Now we can extend the field R to a quasi-ordered algebra R' by the method of Cauchy with the norm (1). For $a \in R'$ we say $a \geqslant 0$, if there exists a Cauchy sequence $x_n \in R$, $x_n \to a$, and $x_n \geqslant 0$. If (a_n) is a Cauchy sequence such that $a_n \geqslant e$, then $|a_n^{-1}| \leqslant 1$ and since R is a field and therefore commutative, it follows that $|a_n^{-1} - a_m^{-1}| = |a_n^{-1} a_m^{-1}(a_m - a_n)|$ and hence (a_n^{-1}) is a Cauchy sequence, too. Consequently, R' is closed under the adjunction of bounded inverses. By Corollary 1 there are non trivial positive homomorphisms of R' onto the field of real numbers. Every such homomorphism is an isomorphism into the reals on R.

It remains to be observed that, if R is a subfield of real numbers which is linear over the rationals and bounded, then the relation of quasi-ordering Σ is unique, and therefore coincides with usual order.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)

REFERENCES

[1] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. XXV, New York, 1948.

[2] G. Birkhoff and R. S. Pierce, *Lattice-ordered rings*, Anais da Academia Brasileira de Ciencias, **28** (1956), 41—69.

[3] I. Vernikoff, S. Krein, A. Tovbin, *Sur les anneaux semi-ordonnées*, (in Russian), DAN SSSR, **30** (1941), 785—787.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 3, 1960

Untersuchungen des Mechanismus der Schwefelung von Ag-Zn-Legierungen unter Verwendung des radioaktiven Isotopes ^{35}S

von

J. MIKULSKI, S. MROWEC und T. WERBER

Vorgelegt von H. NIEWODNICZAŃSKI am 29 Dezember, 1959

In unseren früheren Arbeiten [1] - [3] haben wir bewiesen, dass das Anwachsen der auf der Oberfläche von Kupfer oder von Silber entstehenden Sulphidschicht ausschliesslich durch die nach aussen gerichtete Diffusion des Metalls in der Sulphidphase bedingt wird. Diese Ergebnisse stimmen mit den aus der Theorie von Wagner [4] gezogenen Schlüssen völlig überein. Bei der Schwefelung von Cu-Zn-Legierungen haben wir jedoch feststellen können, dass im Prozess der Bildung des zweischichtigen Zunders auf den Oberflächen dieser Legierungen auch die kernwärts gerichtete Diffusion von Schwefel mitwirkt [5]. Auf Grund der Theorie von Wagner kann man erwarten, dass in diesem Falle ausschiesslich die nach aussen gerichtete Diffusion beider Komponenten vorkommt [6]. Es schien also angewiesen zu erörtern, ob die von uns festgestellte Abweichung von dem Wagnerichen theoretischen Modell als ein Ausnahmefall anzusehen ist, oder ob man bei der Schwefelung anderer binären Legierungen auch mit der kernwärts gerichteten Diffusion des Schwefels zu tun hat.

Die Untersuchungen wurden am System Ag-Zn-durchgeführt, weil während der Schwefelung dieser Legierungen eine Zunderschicht gebildet wird, deren chemische Zusammensetzung und Mikrostruktur ähnlich wie im Falle der Schwefelung von Cu-Zn-Legierungen [7] sind. Ausserdem weist das Ag_2S, aus welchem die aüssere Zunderschicht im Falle von Ag-Zn-Legierungen gebildet ist, besonders grosse Plastizität auf. Dank dieser Plastizität wird die Möglichkeit der Bildung von Rissen in der Zunderschicht während ihres Anwachsens infolge innerer Spannungen praktisch ausgeschlossen; dadurch werden besonders günstige Bedingungen für die Untersuchungen des Mechanismus der Zunderbildung geschaffen.

Die Untersuchungen sind im flüssigen Schwefel bei 444°C unter Verwendung des radioaktiven Isotopes ^{35}S durchgeführt worden. Als Unter-

suchungsmaterial wurden Legierungen verwendet, die 6,5 bis 23 Atomprozente Zn enthielten. Die Methode, sowie die Messanordnung wurden in einer früheren Arbeit [5] beschrieben. Legierungen in Form von Platten $4{,}0\times3{,}0\times0{,}4$ cm wurden im nichtaktiven Medium solange vorgeschwefelt, bis sich auf ihrer Oberflächen Zunderschichten bildeten, die die vom Isotop ^{35}S ausgesandte Strahlung vollständig absorbierten. Dann wurde in das Reaktionsmedium das radioaktive Isotop eingeführt und die Reaktion unter sonst unveränderten Bedingungen fortgesetzt, bis sich eine Zunderschicht bildete, die viel stärker als die während der Vorschwefelung im nichtaktiven Schwefel ursprünglich entstandene Zunderschicht war. Die Dauer der im nichtaktiven Medium geführten Vorschwefelung wurde so gewählt, dass die Stärke der Zunderschicht — wie auch die Zusammensetzung der Legierung sein mag — immer $\approx 5.10^{-2}$ cm betrug. Diese Stärke ist ungefähr zweimal grösser als die kritische Stärke, die vollständige Absorption der vom ^{35}S ausgesandten β-Strahlung sichert. Nach der Beendigung der Schwefelung und nach der Abtrennung der Zunderschicht vom restlichen noch nicht oxydierten Metallkern, wurde mit dem G. M. Zähler Typ BAT 25 die Aktivität von beiden Seiten gemessen.

Die Ergebnisse dieser Messungen sind in den Tafeln I und II zusammengestellt.

TAFEL I

No,	% *at* Zn	t_1 sec	t_2 sec	t_2/t_1	A_1	A_2
1	6,4	60	60	1	3270	142
2	„	60	180	3	3801	602
3	„	60	300	5	3550	655
4	„	60	420	7	3490	1636
5	„	60	540	9	3850	2950
6	11,0	80	80	1	3014	60
7	„	80	240	3	3230	540
8	„	80	400	5	3460	1161
9	„	80	560	7	3508	2500
10	„	80	720	9	3222	2450
11	16,0	100	100	1	2505	157
12	„	100	300	3	3337	936
13	„	100	500	5	3264	1933
14	„	100	700	7	2954	2063
15	„	100	900	9	3313	2455

t_1 — Dauer der Vorschwefelung im nichtaktiven Medium,

t_2 — Dauer der Schwefelung im aktiven Schwefel,

A_1 — Aktivität (Imp./min.) der Zunderoberfläche, die während der Schwefelung im unmittelbaren Kontakt mit dem Schwefel stand,

A_2 — Aktivität der Zunderoberfläche, die während der Schwefelung im ummittelbaren Kontakt mit Metall stand.

TAFEL II

No,	% *at* Zn	t_1 sec	t_2 sec	t_1/t_2	A_1	A_2	A_3
1	23,5	600	300	1/2	1073	96	99
2	„	600	600	1	2880	588	468
3	„	600	1800	3	2836	1450	911
4	„	720	3600	5	1108	852	700

t_1, t_2 und A_1 — wie in Tafel I,

A_2 — Aktivität der äusseren Schicht des Zunders an der Oberfläche, die während der Schwefelung im unmittelbaren Kontakt mi der inneren Zunderschicht stand,

A_3 — Aktivität der innerer Schicht des Zunders an der Oberfläche die während der Schwefelung im unmittelbaren Kontakt mit der äusseren Zunderschicht stand.

Wie aus diesen Data ersichtlich, konnte auf der Phasengrenze Zunder Legierung — unabhängig von der Zusammensetzung der Legierung — immer die Anwesenheit des Isotopes ^{35}S festgestellt werden. Dies beweist, dass im Prozess der Schwefelung von Ag-Zn-Legierungen die kernwärts gerichtete Diffusion des Schwefels mitwirkt.

Der auf den untersuchten Legierungen gebildete Sulphidzunder besteht aus zwei Schichten: der äusseren, die aus Silbersulphid gebaut ist, und der inneren, die als eine heterophasige Mischung von Silber und Zinksulphid bezeichnet werden soll [8].

Die Zusammensetzung, wie auch die Mikrostruktur, des zweischichtigen Sulphidzunders auf der Oberfläche einer Ag-Zn-Legierung steht mit dem theoretischen Modell von Wagner im Einklang [6]. Nach dieser Theorie müssen beide Zunderschichten ausschliesslich infolge der nach aussen gerichteten Diffusion der Metalle entstehen. Unsere Untersuchungsergebnisse haben jedoch bewiesen, dass im Prozess des Anwachsens der inneren Zunderschicht auch die kernwärts gerichtete Diffusion von Schwefel eine Rolle mitspielt.

Die Ergebnisse der letztens durchgeführten Untersuchungen über den Mechanismus der Schwefelung von Ag-Zn-Legierungen nach der Markenmethode zeigen auch daraufhin, dass im Prozess des Zunderanwachsens die kernwärts gerichtete Diffusion von Schwefel mitwirkt [8].

Die Untersuchungsergebnisse sind keineswegs auf diese Art zu deuten, dass das Anwachsen der inneren Sulphidschicht auf den untersuchten Legierungen ausschliesslich infolge der kernwärts gerichteten Diffusion zustande kommt. Diese Untersuchungen liefern nur den Beweis, dass die Mitwirkung dieser Diffusion am Sulphidbildungprozess bedeutend ist.

ZENTRUM DER KERNPHYSIK, KRAKÓW, INSTITUT FÜR KERNFORSCHUNG, POLNISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
(OŚRODEK FIZYKI JĄDROWEJ, KRAKÓW, INSTYTUT BADAŃ JĄDROWYCH, PAN)
INSTITUT DER BERGBAUCHEMIE, BERG- UND HÜTTEN AKADEMIE, KRAKÓW
(KATEDRA CHEMII GÓRNICZEJ, AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA, KRAKÓW)

SCHRIFTTUM

[1] J. Mikulski, S. Mrowec, I. Stroński, T. Werber, Roczniki Chem., **33** (1959), 1285.

[2] — Z. Physik. Chem., **22** (1959), 20.

[3] J. Mikulski, S. Mrowec, T. Werber, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. chem, géogr., **7** (1959), 547.

[4] C. Wagner, Z. Physik. Chem., **21** (1933), 25.

[5] J. Mikulski, S. Mrowec, T. Werber, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. chim. géol. et géogr., **7** (1959), 737.

[6] C. Wagner, J. Electrochem. Soc., **103** (1956), 627.

[7] L. Czerski, S. Mrowec, T. Werber, Archiw. Hutn. PAN 1959, (im Druck).

[8] S. Mrowec, K. Wallisch, T. Werber, Archiw. Hutn. PAN (im Druck).

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 3, 1960

Über den Mechanismus der Schwefelung von Cu-Au-Legierungen

von

J. MIKULSKI, S. MROWEC, I. STROŃSKI und T. WERBER

Vorgelegt von H. NIEWODNICZAŃSKI am 30 Dezember, 1959

Binäre Legierungen welche ein mit dem Oxydationsmittel unter gegeben Bedingungen nicht reagierendes Edelmetall als Bestandteil enthalten, können als das einfachste Modellsystem für die Untersuchungen der Oxydation in Metallegierungen betrachtet werden. Die bis jetzt unter Verwendung von verschiedenen Oxydationsmitteln durchgeführten Untersuchungen haben bewiesen, dass — je nach den Reaktionsbedingungen und der Zusammensetzung der untersuchten Legierungen — entweder ein homogener, aus dem weniger edlem Metall und dem Oxydationsmittel bestehender (BX, wobei X — das Oxydationsmittel bezeichnet) oder aber auch ein heterogener, aus der BX — Verbindung und den Einschlüssen der an Edelmetall (A) angereicherten Legierung aufgebauter Zunder gebildet werden kann [1] - [4]. Im Falle vom heterogenem Zunder wird in der Regel eine Einteilung in zwei Schichten beobachtet. Die äussere, während der Oxydation mit dem Oxydationsmittel unmittelbar grenzende, Zunderschicht ist homogen und besteht ausschliesslich aus der BX-Verbindung. Die innere Schicht dagegen ist aus heterogener Mischung der BX-Verbindung und den Einschlüssen der an Metall A angereicherten Legierung aufgebaut.

In den letzten Jahren wurde von Wagner eine Theorie der Oxydation solcher Legierungen vorgeschlagen [5]. Bei der Aufstellung seiner Theorie ging der Verfasser vom dem Standpunkt aus, dass das Anwachsen des homogenen, sowie auch des heterogenen Zunders ausschliesslich infolge der nach aussen gerichteten Diffusion des Metalls B (in Form von Ionen und Elektronen) durch die Kristallgitterdefektstellen zustandekommt. Ist die Diffusion der Metallionen B in der Phase des Reaktionsproduktes der langsamste Teilprozesss der Oxydation, kann mit der Bildung einer homogenen ausschliesslich aus BX bestehenden Zunderschicht gerechnet werden. Ist dagegen die Diffusion in der Metallphase der langsamste Prozess, dann wird — laut Wagners Theorie — nur zweischichtiger Zunder gebildet.

Bei Hochtemperaturschwefelung von Cu-Au-Legierungen ist mit der Bildung eines zweischichtigen Zunders zu rechnen, weil die Geschwindigkeit der Diffusion in dem unter diesen Bedingungen entstehenden Reaktionsprodukte (also im Cu_2S) um etwa 6 Grösserordnungen die Geschwindigkeit der Diffusion des Metalls in den Legierungen übersteigt [6], [7]. Die Ergebnisse der an Cu-Au-Legierungen durchgeführten Untersuchungen haben die oben angeführten, auf Grund der Theorie von Wagner gezogenen, Schlüsse bestätigt [1], [2].

So weit fehlt aber noch die empirische Bestätigung der theoretischen Annahme von Wagner, nämlich, dass das Anwachsen des zweischichtigen Zunders auf diesen Legierungen erfolgen kann, ohne dass dabei die kernwärts gerichtete Diffusion des Oxydationsmittels eine Rolle spielt. Die von uns in früheren Arbeiten beschriebene Untersuchungen haben jedoch bewiesen, dass während der Schwefelung von Cu-Zn [8] und Ag-Zn [9] Legierungen im flüssigen Schwefel das Mitwirken der kernwärts gerichteten Diffusion des Schwefels im Prozess des Zunderanwachsens nicht zu verkennen ist. Auch die nach der Markenmethode durchgeführten Untersuchungen zeigten daraufhin, dass die Einwirkung der kernwärts gerichteten Diffusion von Schwefel für das Anwachsen des zweischichtigen Zunders auf den Cu-Au-Legierungen nicht unbedeutend ist [1].

Zwecks Feststellung, ob im Prozess der Bildung des zweischichtigen Sulphidzunders auf den Cu-Au-Legierungen die kernwärts gerichtete Diffusion von Schwefel mitwirkt, wurden Untersuchungen durchgeführt, die die Verwendung des radioaktiven Schwefels ^{35}S ausnützten. Die Methode, sowie auch die Arbeitsweise, sind in früheren Arbeiten beschrieben worden [8], [10], [11]. 14% Au enthaltende Untersuchungskörper wurden im flüssigen Schwefel bei 444°C geschwefelt. Die aus der Legierungen verfertigten Platten $2{,}0 \times 1{,}5 \times 0{,}3$ cm wurden mit Schmirgelpapier poliert und dann im nichtaktiven Schwefel ^{32}S solange geschwefelt, bis sich auf ihrer Oberfläche eine Zunderschicht gebildet hat, die infolge ihrer Stärke vollständige Absorption der ^{35}S-Strahlung sichern konnte. Ohne den Prozess zu unterbrechen, wurde dann in die Reaktionskammer eine Pastille des aktiven ^{35}S-Schwefels eingeführt und die Reaktion verschieden lang fortgesetzt.

Nach der Beendigung der Reaktion und nach der Abtrennung der Zunderschichten vom Kern wurde die Aktivität von beiden Seiten der Zunderschicht gemessen. Dann wurden beide Schichten voneinander getrennt und die Aktivität beider miteinander grenzenden Oberflächen gemessen. Die oben beschriebenen Aktivitätsuntersuchungen wurden für jeden Untersuchungskörper zweimal durchgeführt, da der zweischichtige Zunder von beiden Seiten der geschwefelten Platte gebildet wurde. Die Genauigkeit der Aktivitätsmessungen schwankte innerhalb der Grenzen $\pm 3\%$.

Die Ergebnisse einiger beispielsweise gewählten Messungen sind in der Tafel zusammengestellt.

TAFEL

No	t_1	t_2	t_2/t_1	$A_1^{(a)}$	$A_2^{(a)}$	$A_1^{(i)}$	$A_2^{(i)}$
1	5	5	1	454	0	0	0
2	5	15	3	506	0	0	0
3	5	25	5	445	38	37	36
4	2.5	12.5	5	373	29	33	19
5	2.5	12.5	5	372	33	34	25
6	2.5	17.5	7	320	—	—	46
7	2.5	17.5	7	316	62	59	47
8	2.5	22.5	9	362	80	79	48
9	2.5	22.5	9	354	58	55	54

t_1 — Dauer der Vorschwefelung (in Minuten),
t_2 — Dauer der Schwefelung in aktivem Schwefel (in Minuten),
$A_1^{(a)}$ — Aktivität (Imp./Min.) der äusseren Schicht des Zunders an der Oberfläche, die während der Schwefelung im unmittelbaren Kontakt mit Schwefel stand,
$A_2^{(a)}$ — Aktivität (Imp./Min.) der äusseren Schicht des Zunders an der Oberfläche, die während der Schwefelung in unmittelbaren Kontakt mit der inneren Zunderschicht stand,
$A_1^{(i)}$ — Aktivität (Imp./Min.) der inneren Schicht des Zunders an der Oberfläche, die während der Schwefelung in unmittelbarem Kontakt mit der äusseren Zunderschicht stand,
$A_2^{(i)}$ — Aktivität (Imp./Min.) der inneren Schicht des Zunders an der Oberfläche, die während der Schwefelung in unmittelbarem Kontakt mit Metall stand.

Auf Grund der zusammengestellten Data lässt sicht schliesen, dass die Anwesenheit des ^{35}S-Isotopes an der Phasengrenze Zunder-Legierung erst dann festgestellt werden konnte, wenn die Dauer der im radioaktiven Medium geführten Schwefelung, die Dauer der Vorschwefelung ungefähr 5 mal überstieg. Die Aktivität der inneren Schicht betrug dabei ca 15% der an der äusseren Oberfläche des Zunders gemessenen Aktivität. Bei der Schwefelung von Cu-Zn- und Ag-Zn-Legierungen konnte die Anwesenheit des ^{35}S schon festgestellt werden, wenn die Dauer der Schwefelung im radioaktiven Medium zweimal kürzer war, als die Dauer der im nichtaktiven Medium durchgeführten Vorschwefelung [10], [11]. Dies bedeutet, dass die Mitwirkung der kernwärts gerichteten Diffusion des Schwefels im Prozess des Anwachsens des zweischichtigen Sulphidzunders auf der untersuchten Legierung Cu-Au gering ist. Die Ergebnisse der obenbesprochenen Untersuchungen stehen in der ersten Annäherung mit den Voraussetzungen der Theorie von Wagner im Einklang.

Die nach der Markenmethode durchgeführten Untersuchungen des Mechanismus der Schwefelung von Cu-Au-Legierungen deuteten darauf hin, dass das Anwachsen der inneren Zunderschicht auf diesen Legierungen infolge der nach innen gerichteten Diffusion des Schwefels erfolgt [1]. Diese, auf der konventionellen Interpretierung der Markenergebnisse basierende Schlussfolgerung, wurde durch die jetzt von uns durchgeführten

Untersuchungen nicht bestätigt. In den früheren Veröffentlichungen wurde bewiesen, dass die nach der Markenmethode erhaltenen Ergebnisse — wenn konventionell interpretiert — zu falschen Schlüssen betreffs Mechanismus der Bildung des zweischichtigen Zunders auf Kupfer führen können [10], [11]. Die jetzt erhaltenen Ergebnisse zeigen daraufhin, dass auch im Falle von Legierungen, die konventionelle Interprieterung der nach der Markenmethode erhaltenen Ergebnisse zu unbefriedigenden Resultaten führt und einer Korrektur erfordert [12].

ZENTRUM FÜR KERNPHYSIK, KRAKÓW, INSTITUT FÜR KERNFORSCHUNG, POLNISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
(OŚRODEK FIZYKI JĄDROWEJ, KRAKÓW, INSTYTUT BADAŃ JĄDROWYCH, PAN)
INSTITUT FÜR BERGBAUCHEMIE, BERG- UND HÜTTEN AKADEMIE, KRAKÓW
(KATEDRA CHEMII GÓRNICZEJ, AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA, KRAKÓW)

SCHRIFTTUM

[1] L. Czerski, S. Mrowec, T. Werber, Archiw. Hutn. PAN, **3** (1958), 305.
[2] B. Lichter, C. Wagner, J. Electrochem. Soc. (im Druck).
[3] O. Kubaszewski, O. Goldbeck, J. Inst. Metals, **76** (1949), 255.
[4] E. Raub, *Die Edelmetalle und ihre Legierungen*, Springer, Berlin, 1940, S. 195.
[5] C. Wagner, J. Electrochem. Soc., **103** (1956), 571.
[6] G. Tubandt, H. Reinhold, W. Jost, Z. Anorg. u. Allgem. Chem., **177** (1933), 253.
[7] W. Seith, *Diffusion in Metallen*, Springer, Berlin, 1955, S. 48.
[8] J. Mikulski, S. Mrowec, T. Werber, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. chim., géol. et géogr., **7** (1959), 547.
[9] — ibid. **7** (1959), 737.
[10] J. Mikulski, S. Mrowec, I. Stroński, T. Werber, Z. Physik. Chem., **22** (1959), 20.
[11] — Roczniki Chem., **33** (1959), 1285.
[12] S. Mrowec, T. Werber, Acta Metallurgica (im Druck).

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 3, 1960

EXPERIMENTAL PHYSICS

On the Photoluminescence of Fluorescein in Methyl Polymethacrylate

by

J. GRZYWACZ, A. KAWSKI and Z. POLACKI

Presented by A. JABŁOŃSKI on January 13, 1960

Previous investigations [1], [2] proved that emission anisotropy *) does not decrease towards higher concentrations of fluorescein in methyl polymethacrylate (plexiglass) throughout the range of 3×10^{-6} to $6.6\times^{-3}$ g/cm^3. It will be remembered that, for fluorescein in glycerine and a similar range of concentrations, Cauchois [4], Feolilov and Sveshnikov [5], and Tumerman [6] had found a pronounced self-depolarisation effect.

It is the aim of the present paper to explain the absence of concentrational depolarization in methyl polymethacrylate fluorescein solutions. Rigid solutions of fluorescein in methyl polymethacrylate were prepared by polymerization of a solution of fluorescein ($C_{20}H_{12}O_5$, molecular weight 332.30) in methyl methacrylate monomer. The fluorescein used by the present authors is soluble in methyl methacrylate in very small quantities (the highest concentration amounting to about 10^{-4} g/cm^3). Admixtures of ethyl alcohol (to the amount of 9%) to methyl methacrylate monomer have been known [1] to raise the solubility of fluorescein therein quite considerably.

The emission anisotropy in the luminophors investigated was found to be the same, within the limit of experimental error, in the cases of fluorescein in methyl polymethacrylate with and without an admixture of ethyl alcohol, if light of one and the same wavelength was used for excitation. Experiments were also carried out with the aim of detecting concentrational depolarization at monochromatic excitation (Fig. 1). The

*) If plane polarized exciting light is used, the emission anisotropy [3] is given by

$$r = \frac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\parallel} + 2I_{\perp}} = \frac{2P}{3-P},$$

wherein $I_{\parallel}$ and $I_{\perp}$ are the components of the emitted intensity parallel and perpendicular to the vibrations of the electric vector of the exciting light, respectively, and P denotes the degree of polarization.

emission anisotropy was measured visually as already described [7], [8]. From Fig. 1, the spectrum of emission anisotropy of fluoerescein in plexiglass is seen to remain unchanged as the dye concentration increases to 6.6×10^{-3} g/cm^3.

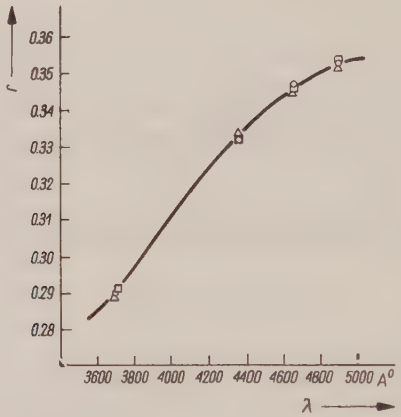

Fig. 1. Emission anisotropy spectrum of fluorescein in methyl polymethacrylate *versus* the dye concentration

○ - 6.6×10^{-3} g/cm^3, □ - 1.2×10^{-4} g/cm^3, Δ — 5.4×10^{-5} g cm^3.

While measuring the emission anisotropy of fluorescein in methyl polymethacrylate, the authors were able to observe that the effect of secondary fluorescence was negligible and did not involve a decrease in emission anisotropy with increasing thickness of the luminophor, at constant concentration and light wavelength, throughout the range of concentrations investigated.

In a previous paper [1], the supposition had been expressed that the absence of a decrease in emission anisotropy with growing concentration of fluorescein in plexiglass is probably connected with the rapid decrease in the duration of the luminescence resulting from concentrational quenching. In this connection, the relative fluorescence yield in methyl polymethacrylate was now investigated. The measurements of relative yield were carried out with a photoelectric device consisting of a light source (stabilized with a magnetic voltage stabilizer), a Zeiss mirror monochromator, an FEU-19 photomultiplier and a DC-bridge amplifier [9]. On passing through a system of lenses, light from the stabilized source incident on the monochromator slit left the latter with a wavelength of $\lambda\sim460$ mμ and was used for exciting fluorescence in a thin luminophor plate. The absorption coefficients of the exciting light and of the fluorescence light were measured as in the method of Bauer and Frąckowiak [10]. When the relative fluorescence intensity had been measured for the various concentrations of the dye, the relative yield was computed from the formulas given in Foerster's monograph [11].

Fig. 2 shows the results obtained in measuring the relative yield, as *versus* the dye concentration. Throughout the range of fluorescein concentrations investigated, the relative yield is found to be constant. Thus, no concentrational quenching appears here as yet.

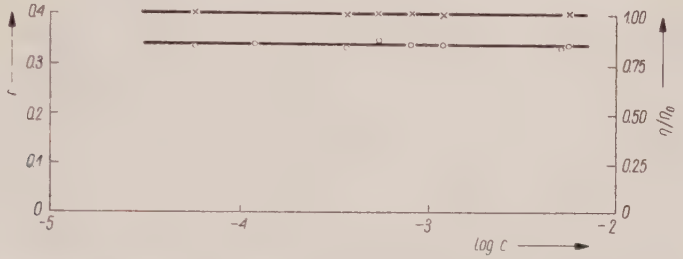

Fig. 2. Emission anisotropy (o) and relative yield (×) of fluorescein in methyl polymethacrylate as *versus* the concentration, at an exciting wavelength of $\lambda \sim 460$ mμ.

It is experimentally known that the decrease in emission anisotropy towards higher concentrations usually occurs much sooner than concentrational quenching. Also, the following factors are known to have a depolarizing effect on the fluorescence of solutions:

a) thermal (Brown) rotation of the luminescent molecules [12], which does not occur in the present case because of the very great viscosity of the solvent (rigid solution);

b) migration of excitation energy between excited and non-excited molecules [11]—[13].

Theoretical considerations due to Foerster [14], [15] proved that partial superposition of the absorption and fluorescence spectra constitutes a prerequisite for the occurrence of energy migration. Fluorescent substances whose absorption and emission spectra overlap but negligibly exhibit a low rate of depolarization or none at all towards higher concentrations. In connection with this, measurements of the overlapping of the spectra were also carried out. The absorption and fluorescence spectra were obtained by a photographic method [16] (using a Hilger spectrograph). The fluorescence spectrum was also measured with a spectrophotometric device consisting of a Zeiss mirror monochromator and an FEU-19 photomultiplier. The spectral sensitivity of the device was determined with a scaled light source. The maxima of the absorption and emission spectra of fluorescein in methyl polymethacrylate were found to be removed wide apart. The absorption maximum corresponds to a wavelength of $\lambda \sim 4350$ Å, and that of fluorescence to $\lambda \sim 5500$ Å. The overlapping of the absorption and emission spectra is small as compared to that of the spectra of fluorescein in glycerine or in water. Moreover, the absorption and fluorescence spectra in methyl polymethacrylate were found to remain unchanged throughout the range of concentrations investigated. It is noteworthy that, in the case of fluorescein in sulphuric

acid, Pekerman [17] observed some displacement of either spectrum towards shorter wavelengths, together with a small degree of overlapping. The absence of a clear effect of secondary fluorescence, too, can only be explained by the insignificant overlapping of the absorption and emission spectra. Hence, it should seem probable that, in the case of fluorescein in methyl polymethacrylate, concentrational depolarization [13], [18] occurs at much higher concentrations than in that of fluorescein in glycerine. On the other hand, the concentration of $\sim 6 \times 10^{-3}$ g/cm^3 was the highest that could be obtained in practice.

The authors are indebted to Dr J. Chwaszczewska for kindly providing them with wavelength filters.

I-ST DEPARTMENT OF PHYSICS, TECHNICAL UNIVERSITY, GDAŃSK
(I KATEDRA FIZYKI, POLITECHNIKA, GDAŃSK)
PHYSICS DEPARTMENT, NORMAL PEDAGOGIC SCHOOL, GDAŃSK
(KATEDRA FIZYKI, WYŻSZA SZKOŁA PEDAGOGICZNA, GDAŃSK)

REFERENCES

[1] A. Kawski, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys., **6** (1958), 533.

[2] J. Głowacki, A. Kawski and B. Polacka, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys., **7** (1959), 353.

[3] A. Jabłoński, Acta Phys. Polon., **16** (1957), 471.

[4] Y. Cauchois, J. Chim. Phys., **27** (1930), 336.

[5] P. P. Feofilov and B. J. Sveshnikov, J. exp. theor. phys., **10** (1940), 1372.

[6] L. A. Tumerman, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **58** (1947), 1945.

[7] A. Kawski, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys. **6** (1958), 671.

[8] — , Acta Phys. Polon., **15** (1956), 283.
— , Optik, **16** (1959), 412.

[9] A. L. Osherovitch, E. N. Pavlova, S. F. Radionov and L. M. Fishkova, J. Techn. Phys., **19** (1949), 184.

[10] R. Bauer and D. Frąckowiak, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **5** (1957), 729.

[11] Th. Foerster, *Fluoreszenz organischer Verbindungen*, Vandenhoeck u. Ruprecht, Goettingen (1951), p. 35—42.

[12] P. Pringsheim, *Fluorescence and Phosphorescence*, Interscience Publ. Inc., New York, 1949.

[13] A. Jabłoński, Acta Phys. Polon., **14** (1955), 295.

[14] Th. Foerster, Naturwiss., **33** (1946), 166.

[15] — , Ann. der Phys., **2** (1948), 55.

[16] A. Jabłoński, C. R. Soc. Polon. Physique, **7** (1926), 1.

[17] S. I. Vavilov, *Mikrostruktura światła* (Polish translation), Warsaw, 1953.

[18] A. Jabłoński, Acta Phys. Polon., **17** (1958), 481.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 3, 1960

Electrophotography on Macromolecular Substances

by

M. SOKOŁOWSKI and W. SZYMANOWSKI

Presented by W. RUBINOWICZ on January 21, 1960

Since 1956 in our laboratory a panel of scientific workers [1] has carried on research investigations on several photoconducting substances and on electrophotography (xerography). Substances like sulphur, colophony, plexiglass and amorphous selenium were investigated and on some of them, for instance on selenium, satisfactory images were obtained [2] by conventional methods [3].

By the middle of 1959 several light-sensitive resins were synthesized in our laboratory, consisting of hydrocarbon resins with built-in aromatic polycyclic compounds. From them light-sensitive layers can be obtained forming a homogeneous system [4].

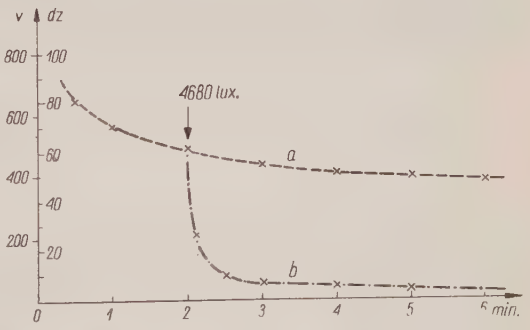

Fig. 1. Surface potential drop of charged light-sensitive resin plate *vs* time: a) darkness (red photographic light), b) incadescent lamp 4680 lux illumination

These light-sensitive resins do not need to be suspended in another medium, as for instance is the case of zinc oxide and other photoconducting substances, their solution can be spread on surfaces of any size and kind. After evaporation of the solvent, a light-sensitive layer is formed on any kind of backing material. Fig. 1 shows the surface potential drop after charging *vs.* time for darkness (red photographic light), and for a 4680 lux illumination with an incedescent lamp. The tube electrometer of special design with which measurements were made was constructed by J. Cywiński [5]. Figs. 2 and 3 show electrophotographic reproductions made by conventional methods using a light-sensitive resin.

In order to get a fair comparison with other photo-conducting substances, extensive measurements of the physical properties of these resins, as well as of their sensitivity, are under way. However, it seems to us that they can be already characterized as follows:

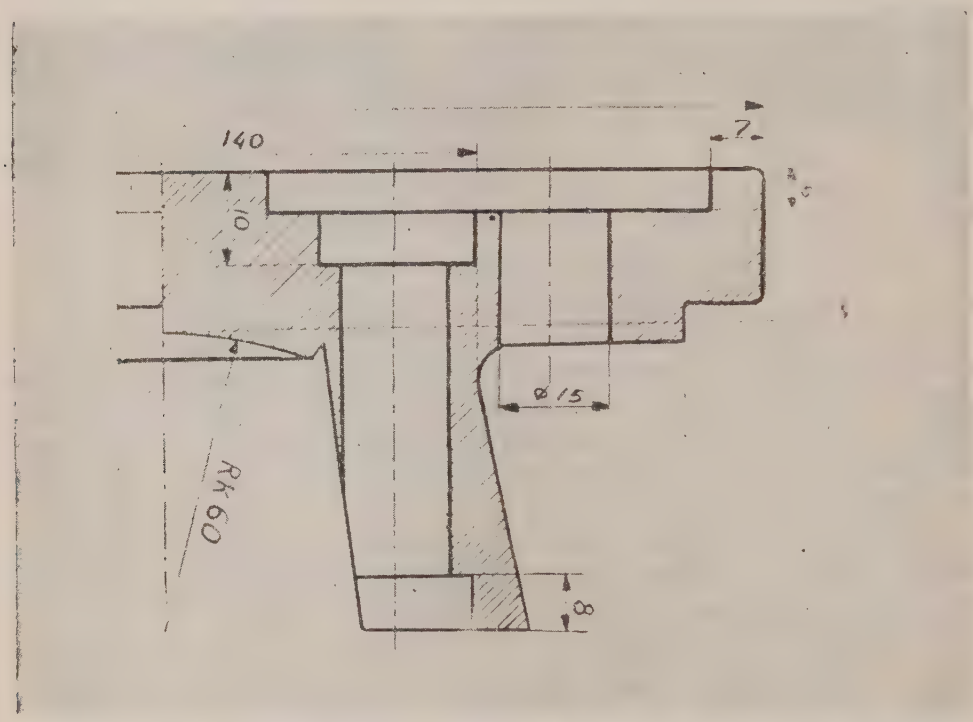

Fig. 2. Contact xeroprint of technical drawing as for blue prints made on light-sensitive resin plate and transferred onto low grade paper (by J. Baran)

1. Their effective dark resistivity is better than that of amorphous selenium [6], being of the order of 10^{16} ohm-cm.

2. They are less sensitive than selenium, but seem to be more sensitive than zinc oxide.

3. They have at least the same resolving power as selenium, because of their grainless character.

4. The quality of electrographic images made on them seems to be better in general than on selenium (higher contrast).

5. There is no limitation as to the size and material of the backing surface.

6. The synthesis of these resins is simple and very cheap, as compared to the production of selenium plates.

The characteristic properties listed above demonstrate that, except for the sensitivity which we hope still to increase markedly, these light-

sensitive resins obtained in our laboratory are in many ways better or at least equal to amorphous selenium, which is considered up to the present time as one of the best photo-conducting substances for electrophotography. This seems to predestine these resins as light-sensitive

Fig. 3. Reproduction of raster diapositive made on light-sensitive resin plate and transferred onto paper (by J. Baran)

material for many applications, for instance: cheaper copying of large technical drawings, blue prints, photographs, pictures and for polygraphy.

The authors believe, however, that the chemical synthesis of such light-sensitive resins has a more fundamental and even theoretical scientific aspect. This will therefore encourage our laboratory to more extensive studies of organic and especially macromolecular substances as intrinsic semiconductors. Such studies, started independently by A. T. Vartanyan [7] and D. D. Eley [8] in 1948 and reviewed lately by Eley [9], seem to hold many theoretical and practical promises. Recent investigations of irradiated and thermally treated polyorganic compounds in the Soviet Union [10] confirm also the growing importance of research in this comparatively new field of organic semi-conductors and its theoretical and practical possibilities.

PHYSICAL LABORATORY A, TECHNICAL UNIVERSITY, WARSAW
(ZAKŁAD FIZYKI OGÓLNEJ A, POLITECHNIKA, WARSZAWA)

REFERENCES

[1] Communiqué at the XVth Meeting of the Polish Physical Society. November, 1957, Wrocław.

[2] Report at the Polish Radiological Society, March 1958, Warsaw.

[3] R. M. Schaffert and C. D. Oughton, J. Opt. Soc. Amer., (1948), 991.

[4] Application for Polish Patent No. P 92149 October 4th, 1959.

[5] Paper read at the XVI-th Meeting of the Polish Physical Society, September 1959, Toruń (to be published).

[6] F. H. Keck, J. Opt. Soc. Amer., **41** (1952), 53.

[7] A. T. Vartanyan, J. Phys. Chem. USSR, **22** (1948), 769.

[8] D. D. Eley, Nature, **162** (1948), 819.

[9] — , Research (1959), 293.

[10] A. W. Toptchyiev, M. A. Heiderich, B. E. Davydov, W. A. Kargin, B. A. Krencel, I. M. Kustanowith and L. C. Polak, DAN. USSR, **128** (1959), 312.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 3, 1960

PHYSIQUE EXPERIMENTALE

L'influence de la température sur la largeur des raies Raman des quelques tetrachlorures et calcul des temps de la relaxation d'orientation

par

B. MOSZYŃSKA et K. SZCZEPANIAK

Présenté par A. JABŁOŃSKI le 23 janvier 1960

Introduction

Tandis que la fréquence d'une raie Raman et son dégré de dépolarisation caractérisent surtout une molécule isolée, la largeur de la raie constitue un paramètre qui est bien sensible à l'entourage moléculaire.

Il y a quelques ans, Sobielman [1] présenta une interprétation de la différence entre la largeur de la raie Raman polarisée et celle de la raie Raman dépolarisée d'une substance à l'état liquide; récemment, Rakov [2] a discuté ce problème d'une façon plus détaillée.

Grâce au mouvement chaotique rotatoire d'une molecule dans le liquide, la projection du moment induit dipolaire sur un axe arbitraire fixé dans l'espace est une fonction accidentelle du temps. Conformément à la théorie des processus accidentels stationnaires on peut développer cette fonction en spectre des fréquences. Dans le cas d'une vibration, pour laquelle le tenseur des dérivées de la polarisabilité est totalement anisotrope, ce développement donne le profil de la raie, dont la larguer est égale au réciproque du temps de relaxation d'orientation du liquide, autrement dit, du temps moyen d'un changement de l'orientation d'une molecule dans le liquide.

Depuis la publication de Sobielman, quelques travaux parurent, (parmi ceux-ci un travail d'une de nous [3]); on y a étudié l'influence de tels paramètres comme la température et la phase du corps sur les largeurs des raies dépolarisées. Certains auteurs ont calculé aussi les temps de la relaxation d'orientation.

Dans le but d'étudier l'influence de la variation de la température sur les largeurs des raies Raman, il convient d'examiner toute une série de liquides, possèdant le plus grand nombre possible de paramètres communs; c'est précisément le cas des trois tetrachlorures CCl_4, $SiCl_4$ et $TiCl_4$. Toutes

ces molécules présentent en principe une symétrie sphérique (tétraédrique); elles sont non polaires, elles ne diffèrent entre elles que par l'atome central, les forces intermoléculaires y augmentent cependant avec l'électropositivité de l'atome central.

Résultats

Les spectres Raman ont été obtenus à l'aide du spectrographe Huet B II sur des plaques „Agfa Raman". La température exigée a été maintenue à l'aide d'un thermostat Hoeppler. Le liquide chauffant ou réfrigérant (de l'eau ou de l'alcool) coulait à travers un manteau qui entourait la cuvette. La cuvette employée pour l'étude de $SiCl_4$ possédait, en outre, un manteau à vide.

Le spectre de tétrachlorure présente quatre raies; celle d'entre elles qui correspond à la vibration totalement symétrique, ν_1, est entièrement polarisée; les trois autres: ν_2, ν_3 et ν_4 sont totalement dépolarisées.

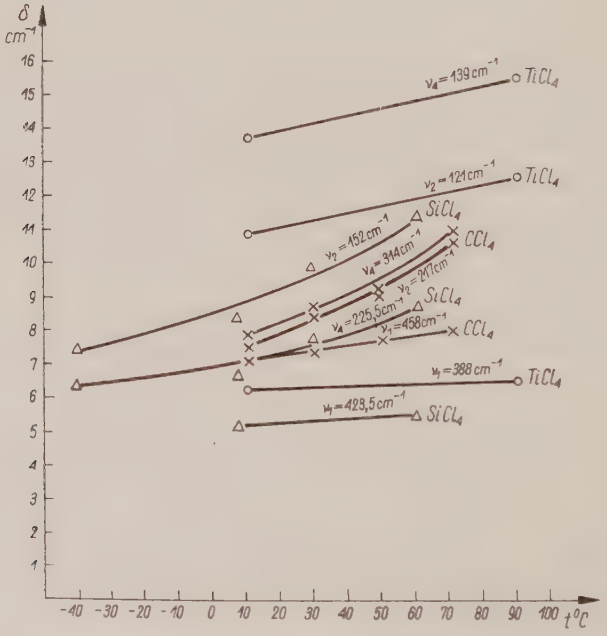

Fig. 1

La Fig. 1 donne les diagrammes qui représentent les largeurs mésurées des raies Raman des trois tétrachlorures en fonction de la température. On y voit que les largeurs des raies polarisées restent à peu près les mêmes *) tandis que les raies dépolarisées ν_2 et ν_4 s'élargissent avec

*) Un petit élargissement de la raie ν_1 de tetrachlorure de carbone est dû à la présence des raies de différences: $\nu_3' - \nu_4$ et $\nu_3'' - \nu_4$ dont l'intensité augmente avec la température [3].

l'accroissement de la température, en accord avec la théorie. Nous ne discuterons pas ici le comportement des largeurs des raies ν_3 dont la structure est bien compliquée.

Aucune évaluation quantitative ne peut être effectuée à l'aide des données des diagrammes, parce que, à cause de la présence de deux isotopes du chlore, ^{35}Cl et ^{37}Cl, chaque raie est une résultante de plusieurs raies composantes. Toutefois, pour les raies ν_1 et ν_2 (l'atome central ne prend point part dans la vibration) la séparation approximative des composante ne présente que peu de difficultés. Il y a seulement lieu d'admettre que les largeurs de toutes les composantes isotopiques d'une raie sont les mêmes, tandis que les rapports des intensités des composantes et les intervalles entre elles s'accordent avec ceux qui sont prévus par la théorie [4]. Pour les raies ν_2, les intervalles entre les composantes sont très petits par rapport à leurs largeurs; on peut donc admettre en plus, que les composantes de ces raies ont une forme dispersive; cette approximation ne peut conduire qu'a une inéxactitude tout à fait négligeable.

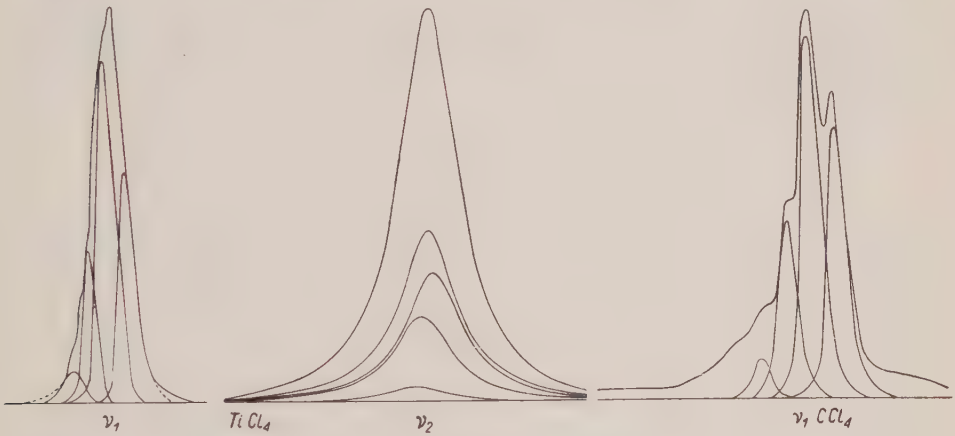

Fig. 2

En Fig. 2 nous présentons à titre d'exemple les séparations graphiques des raies $\nu_1 = 388$ cm^{-1} et $\nu_2 = 121$ cm^{-1} de $TiCl_4$ à côté de celle de $\nu_1 = 458$ cm^{-1} de CCl_4. Les composantes de la raie ν_1 de CCl_4 sont de forme dispersive; ce n'est pas le cas pour la raie ν_1 de $TiCl_4$; donc, ainsi, c'est la cause de la différence entre les profils de ces raies.

Pour obtenir les largeurs réelles de la raie, il faut encore soustraire la largeur de la raie excitatrice (1,0 cm^{-1} à peu près) de celle de la raie composante.

Les résultats obtenus par ce procédé sont présentés dans les colonnes 2 et 3 du Tableau ci-dessous. La différence entre les largeurs des raies dépolarisées et celles des raies polarisées à toutes les températures étudiées est frappante. La largeur de la raie dépolarisée ν_2 de $TiCl_4$ est la plus grande, tandis que sa dépendance de la température est la moins prononcée.

Calcul des temps de relaxation

Pour calculer la temps de relaxation il faut d'abord estimer la valeur de cette partie de la largeur de la raie dépolarisée, qui n'est responsable que du mouvement rotatoire non quantifié. Rezayev [5] et Rakov [2] ont admis pour cette valeur la différence entre la largeur de la raie du liquide à la température de mesure et celle de la raie du solide tout près du point de fusion.

Cependant, cette méthode est inapplicable au cas du tétrachlorure de carbone. Rezayev [5] a trouvé que la cristallisation ne change que de très peu les largeurs de raies Raman de CCl_4. On peut considérer ce fait comme une confirmation de plus des conclusions de Hildebrand [6], que les molecules de CCl_4 gardent leur mouvement rotatoire même dans l'état cristallin à plus d'une vingtaine des dégrés au-dessous du point de cristallisation, c'est à dire jusqu'à la transformation de la structure tétraédrique du réseau cristallin en structure monoclinique.

Si le mouvement rotatoire non quantifié était la cause unique de l'élargissement de la raie dépolarisée, le réciproque de la différence entre la largeur de la raie dépolarisée et celle de la raie polarisée serait égale au temps de relaxation d'orientation.

TABLEAU I

Largeurs des composantes et les temps de relaxation

	$t°$	$\delta(\nu_1)$ cm^{-1}	$\delta(\nu_2)$ cm^{-1}	$\Delta\delta = \delta(\nu_2) - \delta(\nu_1)$ cm^{-1}	τ_1 10^{-12} sec.	$\delta(\nu_2)_{2\to\infty}$ cm^{-1}	$\Delta\delta = \delta(\nu_2) - \delta(\nu_2)_{\eta\infty}$	τ_2 10^{-12} sec.
CCl_4	10°	1,9 ± 0,2	5,2 ± 0,6	3,3 ± 0,7	10,0 ± 2,0	2,2 ± 0,4	3,0 ± 0,4	11,0 ± 1,5
	30°		6,2 ± 0,8	4,3 ± 0,9	7,8 ± 2,0		4,0 ± 0,4	8,3 ± 1,0
	50°		7,3 ± 7,6	5,4 ± 0,7	6,2 ± 0,8		5,1 ± 0,4	6,5 ± 0,6
	70°		8,6 ± 1,1	6,7 ± 1,2	5,0 ± 1,0		6,4 ± 0,4	5,2 ± 0,3
$SiCl_4$	− 40°	1,5 ± 0,3	5,8 ± 0,3	4,3 ± 0,5	7,8 ± 0,8	2,8 ± 1,	3,0 ± 1,0	11,0 ± 4,
	7°		6,8 ± 0,6	5,3 ± 0,8	6,3 ± 0,9		4,0 ± 1,0	8,3 ± 2,
	30°		8,1 ± 0,4	6,6 ± 0,6	5,0 ± 0,5		5,3 ± 1,0	6,3 ± 1,
	60°		10,2 ± 0,5	8,7 ± 0,7	3,9 ± 0,3		7,4 ± 1,0	4,5 ± 0,5
$TiCl_4$	10°	2,0 ± 0,2	9,0 ± 0,3	7,0 ± 0,4	4,8 ± 6,3	5,7 ± 0,5	3,3 ± 0,5	10,0 ± 1,5
	90°		11,1 ± 0,5	9,1 ± 0,6	3,7 ± 0,2		5,4 ± 0,5	6,3 ± 0,6

Ces deux grandeurs: $\Delta\delta = \delta(\nu_2) - \delta(\nu_1)$ et τ_1 sont introduites dans la 4-me et 5-me colonne du Tableau I. On voit que cette méthode ne donne pas de résultats concluants, car il ne semble pas possible que le temps de relaxation de $TiCl_4$ soit deux fois plus court que celui de CCl_4.

On peut attaquer le problème d'une autre manière, à savoir à partir de l'analogie avec la viscosité.

Pour désigner le temps de relaxation d'orientation d'une molécule dans le liquide on utilise d'habitude une formule s'appliquant à une particule macroscopique plongée dans un liquide:

$$\tau = \frac{4\pi a^3 \eta}{3kT}, \tag{1}$$

où a désigne le radius effectif de cette particule, η — le coefficient de viscosité; τ est le tiers du temps de relaxation de Debye [7]. Cependant, l'expérience montre que cette formule n'est pas directment applicable aux processus moléculaires, la viscosité moléculaire n'étant pas égale à la viscosité macroscopique. Plusieurs travaux (surtout sur la dispersion diélectrique, [8]) semblent pourtant prouver que pour les viscosités suffisamment petites, les deux viscosités sont proportionnelles.

La viscosité est un facteur qui empêche une molécule de tourner. Comme la viscosité s'approche de l'infinité, la rotation des molecules disparaît, et l'élargissement provenant du mouvement rotatoire s'annule. Si nous traçons la largeur de la raie dépolarisée en fonction de $1/\eta$ (la dépendance de T peut être négligée), l'extrapolation à l'infinité donnera donc la largeur de la raie Raman correspondant aux molécules pourvues du mouvement rotatoire ($\delta(\nu_2)_{\eta\to\infty}$ — colonne 6 du Tableau I), et ainsi après soustraction de celle-la de la largeur observée — l'élargissement dû au mouvement rotatoire brownien ($\Delta\delta = \delta(\nu_2) - \delta(\nu_2)_{\eta\to\infty}$ — colonne 7 *). Les valeurs des temps de relaxation τ_2 calculées d'après cette méthode sont présentées dans la dernière colonne du Tableau I. Elles sont presque les mêmes pour les trois tétrachlorures — ce qui semble répondre à la réalité.

La comparaison des élargissements de la raie depolarisée donnés par la formule: $\Delta\delta = \delta(\nu_2) - \delta(\nu_1)$ (colonne 4 du Tableau) avec ceux donnés par la formule: $\Delta\delta = \delta(\nu_2) - \delta(\nu_2)_{\eta\to\infty}$ (colonne 7) montre que, pour CCl_4, les deux formules donnent les mêmes valeurs de $\Delta\delta$, et en conséquence, les mêmes valeurs de τ. Cela veut dire que pour CCl_4 l'élargissement des raies dépolarisées est dû surtout au mouvement rotatoire brownien. Au contraire, dans le cas du $TiCl_4$ il y a évidemment d'autres causes d'élargissement des raies. Il est à supposer que les dipôles Ti-Cl peuvent agir à proximité immédiate de la molécule en la déformant à la symétrie C_{3v}. Cela devrait mener au dédoublement des raies ν_3 et ν_4. On l'a observé en effet pour la raie ν_3 qui est dûe à la vibration de valence [10]. La grande largeur de la raie ν_4 peut être occasionée par un fendage impossible à distinguer. La déformation des molecules mentionnée ci-dessus pourrait produire des interactions instantanées du type dipôle-dipôle qui donnent d'habitude naissance à un élargissement des raies Raman du liquide.

Le tétrachlorure de silicium occupe une position intermédiaire entre CCl_4 et $TiCl_4$.

*) Nous avons emprunté cette méthode à Rakov [2].

On peut en conclure, que l'investigation des largeurs et des profils de trois tétrachlorures met en lumière le caractère des forces intermoléculaires qui sont surtout des forces de dispersion dans CCl_4, et semblent devenir de plus en plus des forces dirigées en passant de $SiCl_4$ à $TiCl_4$.

Le temps de la relaxation d'orientation et la viscosité

Eyring [9] considère l'écoulement visquex comme le passage d'une certaine unité de matière d'une position d'équilibre à une autre par dessus une barrière de potentiel.

$$\eta = A e^{\frac{U}{kT}}, \tag{2}$$

où U désigne une énergie d'activation exigée pour le franchissement de cette barrière.

Or, on exprime le temps de la relaxation d'orientation par une relation tout à fait analogue:

$$\tau = B \cdot e^{\frac{U}{kT}}, \tag{3}$$

où U' désigne une barrière de potentiel qu'une molécule devrait franchir pour changer d'orientation.

TABLEAU II

	Energies d'activation		$\tau_{exp.}/\tau_{theor.}$
	U kcal./mol.	U' kcal./mol.	
CCl_4	2,35 ± 0,02	2,5 ± 0,6	0,35 ± 0,04
$SiCl_4$	1,35 ± 0,35	1,3 ± 2,2	0,41 ± 0,07
$TiCl_4$	1,5 ± 0,15	1,3 ± 0,6	0,37 ± 0,04

Dans le Tableau II nous avons présenté les valeurs des U, obtenues à l'aide des données concernant les viscosités, à côté des valeurs de U' calculées à l'aide des temps de relaxation. On voit que les deux barriéres de potentiel ont les mêmes valeurs. Cela démontre en outre, la proportionalité entre la viscosité et le temps de relaxation.

La dernière colonne du Tableau II donne les valeurs des quotients des valeurs experimentales des temps de relaxation d'orientation et de celles des temps de relaxation obtenues par la formule (1). Pour trouver les valeurs des rayons des molécules nous avons utilisé la formule:

$$r = \left(\frac{3}{4\pi} \cdot \frac{V}{N} \cdot 0.74\right)^{1/3}. \tag{4}$$

Les rapports sont presque les mêmes pour toutes les températures de mesure et, ce qui plus intéressant — pour toutes les trois substances.

Le gros de ce travail a été effectué à l'Institut de Physique de l'Université de Varsovie. Il a été terminé à la Chaire de Physique A de Institut Polytechnique de Varsovie.

Nous tenons à exprimer nos remerciements sincères aux Professeurs W. Szymanowski et T. Skaliński pour l'intêret qu'ils ont prêté à ce travail au cours de l'élaboration des résultats.

INSTITUT DE PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE DE L'UNIVERSITÉ DE VARSOVIE
(INSTYTUT FIZYKI DOŚWIADCZALNEJ, UNIWERSYTET, WARSZAWA)
CHAIRE DE PHYSIQUE A DE L'INSTITUT POLYTECHNIQUE DE VARSOVIE
(KATEDRA FIZYKI, A, POLITECHNIKA, WARSZAWA)

OUVRAGES CITÉS

[1] J. J. Sobielmann, Izw. A. N. SSSR, **17** (1953), 554.
[2] A. R. Rakov, Opt. et Spectr. VII, **2** (1959), 202.
[3] B. Moszyńska, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, **4** (1956), 769.
[4] G. Herzberg, *Infrared and Raman spectra*, New York, 1949.
[5] J. J. Rezayev, WM. U., **2** (1957), 145.
[6] J. H. Hildebrand, J. Ch. Phys., **15** (1947), 727.
[7] M. A. Leontovitch, J. of Phys., **4** (1941), 499.
[8] Ch. P. Smyth, *Dielectric behavior and structure*, 1955.
[9] H. Eyring, J. Chem. Phys., **4** (1936), 283 et **5** (1937), 726.
[10] B. Moszyńska, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys., **7** (1959), 455.

БЮЛЛЕТЕНЬ
ПОЛЬСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ, АСТРОНОМИЧЕСКИХ
И ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

1960

ТОМ VIII Резюме статей ВЫПУСК 3

А. МОНКОВСКИЙ, **ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ СУММАМИ РАЗЛИЧНЫХ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ** . . . . . стр. 125—126

В настоящей работе даются следующие теоремы, являющиеся уточнением теоремы Рихерта:

Каждое целое число $>$ 55 (121, 161, 205) является суммой различных простых чисел вида $4k-1$ (соответственно $4k+1$, $6k-1$, $6k+1$).

Доказательство опирается на одну из теорем Рихерта и на теорему Бройша о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях: $4k \pm 1$, $6k \pm 1$.

З. ЦЕСЕЛЬСКИЙ, **О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ БАЗИСА ШАУДЕРА ПРОСТРАНСТВА** $C_{\langle 0,1\rangle}$ . . . . . стр. 141—144

Пусть $C_{\langle 0,1\rangle}$ — пространство всех непрерывных функций x на сегменте $\langle 0,1\rangle$, с нормой $\|x\| = \max_{\langle 0,1\rangle} |x(t)|$ и пусть ω_1, $\{\varphi_n\}$, S_n и a_n определены соответственно через (a), (b) и (c), где $\{\chi_n\}$ — ортонормальная система Хаара [1], [2]. Главным результатом является следующая теорема:

Если ω удовлетворяет условиям (*), (**), (***) *и* $x \in C_{\langle 0,1\rangle}$, *тогда эквивалентны следующие три условия:*

1° $a_n = O\left[\sqrt{n}\ \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$,

2° $|x - S_n| = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$,

3° $\omega_1(\delta) = O[\omega(\delta)]$,

где O зависит лишь от ω.

В. СЛЕБОДЗИНСКИЙ, **О ПРОДОЛЖЕНИЯХ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ** стр. 145—150

Пусть L — линейная связность, данная на главном косом произведении B, базой которого является аналитическое многообразие V^n, а группой структуры — линейная группа Ли Γ, действующая в n-мерном векторном пространстве. Показано, что Γ индуцирует последовательность линейных групп $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$ и последовательность главных косых произведений $B, B_1, B_2, B_3, \ldots$ таких, что B_k имеет своей базой B_{k-1}, а группой структуры Γ_k.

На каждом пространстве B_k имеется семейство линейных связностей, которые являются продолжениями связности L. Если Γ_k редуцируется до тождества, то на произведении $V^n \times B \times B_1 \times \ldots \times B_k$ имеется однозначное продолжение связности L. Если последовательность групп бесконечная, то на произведении $V^n \times B \times B_1 \times B_2 \times \ldots$ получаем связность L_∞ имеющую группой структуры $\Gamma_\infty = \Gamma \times \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \ldots$. Приводится применение к проблеме равновесия двух линейных связностей данных на V^n.

З. ОПЯЛЬ, **О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ** $x'' + g(x) = p(t)$ . . . . . стр. 151—156

В работе доказано, что если непрерывная функция $g(x)$ удовлетворяет условиям

$$xg(x) > 0 \quad \text{для} \quad x \neq 0, \qquad \lim_{|x|\to\infty} g(x) = +\infty$$

и если

$$\left(G(x) = \int_0^x g(u)\,du\right):$$

$$\liminf_{|x|\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \int_0^x \frac{du}{\sqrt{G(x) - G(u)}} \right| \geqslant T_0/4 \quad (T_0 > 0),$$

то при любой функции $p(t)$ непрерывной и периодической с периодом $T < T_0$ уравнение $x'' + g(x) = p(t)$ обладает, по крайней мере, одним решением с периодом T.

А. ГЕТЦ и Ч. РЫЛЛЬ-НАРДЗЕВСКИЙ, **О БАЗИСАХ АБСТРАКТНЫХ АЛГЕБР** . . . . . стр. 157—162

Базисом абстрактной алгебры (в смысле принятом в работе [2]) называется любая система независимых элементов, порождающая всю алгебру. В работе доказывается, что *мощности базисов данной алгебры образуют арифметическую прогрессию* (Теорема 5) *и что всякая арифметическая прогрессия, в которой первый член не превышает разности, является множеством мощностей всех базисов некоторой алгебры* (Теорема 7).

Сверх того, доказывается, что *в алгебре, имеющей базис мощности 1 и базис мощности* $k > 1$, *существуют минимальные множества особенных элементов произвольной конечной мощности, порождающие всю алгебру. Особенным* называется такой элемент алгебры, что система, состоящая из него одного, не является независимой.

В. МЛЯК, **ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В АБСТРАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА** (L) . . . . . стр. 163—168

В настоящей работе рассматривается уравнение (1) в пространстве E типа (L) в смысле Какутани. $A(t)$ при каждом $t \in [0, a]$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы типа (C_0); не предполагается, что область определения $A(t)$ не зависит от t.

При некоторых предположениях установлено существование операторной функции $U(t,s)$ такой, что для $x \in \bigcap D[A(t)] \cap S$ почти везде справедливы уравнения (25) и (26).

Я. В. ЯВОРОВСКИЙ, **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ КАКУТАНИ** . . . стр. 169—171

К. Куратовский поставил вопрос — может ли метод исследования непрерывных комплексных функций быть применен для доказательства следующей теоремы Какутани.

Пусть f — действительная непрерывная функция с действительными значениями, определенная на двухмерной сфере S^2 и пусть a_0, a_1, a_2 — равнобедренный треугольник на S^2. В таком случае существует вращение h сферы S^2 такое, что

$$f(h(a_0)) = f(h(a_1)) = f(h(a_2)).$$

В работе дается доказательство теоремы Какутани при применении вышеупомянутого метода. Доказательство теоремы сводится к исследованию существования непрерывной ветви логарифма некоторого преобразования трехмерного проективного пространства в плоскость комплексных чисел отличных от нуля.

В. ЗАВАДОВСКИЙ, **ОДНА ТЕОРЕМА ОБ КВАЗИ-УПОРЯДОЧЕННЫХ АЛГЕБРАХ С ДЕЛЕНИЕМ** . . . . . стр. 173—177

Кольцо R называется квази-упорядоченным, если в R определена реляция квази-упорядоченности удовлетворяющая следующим условиям ([1], стр. 4);

I. $x \leqslant x$,

II. $x \leqslant y$, $y \leqslant z$ влечет за собой $x \leqslant z$, и совместима с алгебраической структурой R,

III. для всех $a \in R$ $x \leqslant y$ влечет за собой $x + a \leqslant y + a$,

IV. для всех $a \geqslant 0$, $x \leqslant y$ влечет за собой $ax \leqslant ay$, $xa \leqslant ya$.

Элемент $a \epsilon R$ называется *неотрицательным*, если $a \geqslant 0$; *положительным* же $(a > 0)$, если $a \geqslant 0$ и если обратное неравенство $a \leqslant 0$ не справедливо. Элемент a кольца с положительной единицей $e > 0$ *ограниченный*, если существует такое натуральное число n, что $\pm a \leqslant ne$.

Кольцо с положительной единицей *ограничено*, если всякий его элемент ограничен. Квази-упорядоченное кольцо R называется *квази-упорядоченной алгеброй*, если R является алгеброй над полем действительных чисел и для всякого действительного числа λ

$$\lambda \geqslant 0, \quad a \geqslant 0 \quad \text{влечет за собой} \quad \lambda a \geqslant 0.$$

Доказывается следующая теорема:

Всякая ограниченная квази-упорядоченная алгебра с делением и с положительной единицей изоморфна полю действительных чисел.

Я. МИКУЛЬСКИЙ, С. МРОВЕЦ и Т. ВЕРБЕР, **ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА СУЛЬФИДИРОВАНИЯ СПЛАВОВ СЕРЕБРА С ЦИНКОМ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ РАДИОАКТИВНОГО ИЗОТОПА СЕРЫ** S^{35} . . . стр. 179—182

В предшествующих своих работах [1], [2], [3] авторы показали, что сернистая окалина на меди и серебре образуется исключительно вследствие наружу-направленной диффузии металла через слой окалины. Для сплавов Cu-Zn однако, обнаружена диффузия серы через наружный слой сернистой окалины, во время сульфидирования в жидкой сере при таких же условиях реакции [5].

Проведенные авторами исследования имеют задачей определение: имеет-ли место диффузия серы через окалину, полученную на сплавах Ag-Zn?

Исследования были проведены при помощи изотопа S^{35} по этому же методу и при тех же условиях процесса сульфидирования, как для меди, серебра и сплавов Cu-Zn. Были применены сплавы Ag-Zn со следующими составами: 6,4 ат. % Zn, 11,0 ат. % Zn, 16,0 ат. % Zn и 23,5 ат. % Zn. Полученные результаты показывают, что для всех концентраций исследованных сплавов во время процесса сульфидирования в жидкой сере происходит диффузия серы, направленная к металлическому сердечнику.

Из вышеприведенного следует, что внутренний слой сернистой окалины на сплавах Cu-Zn и Ag-Zn при таких же условиях реакции и концентрациях цинка, образуется за счет серы, которая продиффундировала внутрь через наружный слой окалины.

Я. МИКУЛЬСКИЙ, С. МРОВЕЦ, И. СТРОНЬСКИЙ и Т. ВЕРБЕР, **О МЕХАНИЗМЕ СУЛЬФИДИРОВАНИЯ СПЛАВОВ МЕДИ С ЗОЛОТОМ** стр. 183—186

Простыми модельными системами для исследования реакции окалинообразования являются двухкомпонентные системы, в которых один из компонентов не реагирует с окислителем в данных условиях реакции. В разработанной Вагнером теории окисления сплавов этого типа [5] принимается, что независимо от характера образующейся окалины (гомо- или гетерогенной), нарастание ее происходит исключительно вследствие наружу-направленной диффузии метала через окалину. К системам этого типа принадлежат сплавы меди с золотом, реагирующие с жидкой серой. Из кинетики этой реакции равно как из морфологического строения сернистых окалин на этих сплавах [1], [2] следует, что процесс окалинообразования происходит в соответствии с теоретической моделью Вагнера. С другой стороны, из положения инертной метки в окалине [1] следовало бы, что в процессе нарастания окалины имеет место направленная внутрь диффузия серы.

Для определения, происходит ли действительно нарастание внутреннего слоя окалины ($Cu_{1,8}$ S + сплав обогащенный золотом) за счет серы, продиффундировавшей через наружный слой окалины, авторы применяли метод, описанный в предыдущих работах [8], [10], [11]. Этот метод опирается на применение радиоактивного изотопа S^{35}.

Исследования были проведены на сплаве Cu-Au с концентрацией 14% Au, препараты которого были сульфидированы в кипящей сере. Полученные результаты показывают, что диффузия серы действительно имеет место, однако, нельзя определить размеры ее содействия в процессе нарастания внутреннего слоя окалины.

И. ГЖИВАЧ, А. КАВСКИЙ и З. ПОЛЯЦКИЙ, **О ФОТОЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ ФЛУОРОСЦЕИНА В ПОЛИМЕТАКРИЛАТЕ МЕТИЛА** . . . стр. 187—190

Исследована зависимость анизотропии эмиссии, а также относительного выхода флуоросцеина в полиметакрилате метила от концентрации. В пределе концентраций от $3 \cdot 10^{-6}$ г/см^3 до $6{,}6 \cdot 10^{-3}$ г/см^3 самодеполяризация равно как и концентрационное тушение не были обнаружены.

Констатировано, что отсутствие концентрационной деполяризации фотолюминесценции флуоросцеина в полиметакрилате метила в исследуемом пределе концентраций вызвано небольшим наложением спектров абсорбции и эмиссии.

Н. СОКОЛОВСКИЙ и В. ШИМАНОВСКИЙ, **ЭЛЕКТРОГРАФИЯ НА МАКРОМОЛЕКУЛЯРНЫХ СУБСТАНЦИЯХ** . . . . . стр. 191—194

В половине 1959 г. авторы получили синтетически в своей лаборатории несколько светочувствительных смол. Эти смолы имеют структуру углеводородных цепей с включенными ароматическими кольцами [4]. Из этих смол можно получить светочувствительный слой, являющийся однородной системой. Они не должны быть суспендированы в иной среде, как, например, это происходит с окисью цинка или другими светочувствительными субстанциями, но их раствор может быть разлит на поверхность из любого материала и любых размеров. После испарения растворителя образуется светочувствительный слой на подкладках из разного материала.

В настоящее время проводятся измерения характеристических физических свойств этих смол. Несмотря на это, уже теперь можно привести некоторые их характеристические свойства.

1) В общем их удельное сопротивление порядка 10^{16} *ом-см* выше, чем удельное сопротивление аморфного селена [6]. Заметим, что потенциал, необходимый для их зарядки меньше, чем соответствующий потециал для селена.

2) Эти смолы менее чувствительны, чем селен, но — по всей вероятности — более чувствительны, чем окись цинка.

3) Они обладают — по меньшей мере — такой же разрешающей способностью, как и селен, что обусловливается их однородной структурой.

4) Качество электрофотографических отображений, полученных при помощи этих смол, кажется лучшим, чем при применении селена (бóльшая контрастность).

5) Нет ограничений в отношении размера и рода подкладочного материала.

6) Синтез этих смол весьма простой и дешевый по сравнению с селеновыми пластинками.

Вышеупомянутые характеристические особенности светочувствительных смол указывают на то, что за исключением чувствительности, которую авторы надеются еще значительно повысить, смолы полученные в их лаборатории оказываются во многих отношениях лучше или, по крайней мере, не уступают селену. Как кажется, эти свойства предназначают светочувствительную смолу в качестве материала, применимого для многих целей, как, например, дешевое копирование больших технических рисунков (вместо озалитовых копий), репродуцирование снимков, документов и печатного текста, а также для полиграфических целей..

Б. МОШИНСКАЯ и К. ЩЕПАНЯК, **ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ШИРИНУ РАМАНОВСКИХ ЛИНИЙ ЧЕТЫРЕХХЛОРИСТЫХ: УГЛЕРОДА, КРЕМНИЯ И ТИТАНА И ВЫЧИСЛЕНИЕ ВРЕМЕН ОРИЕНТАЦИОННОЙ РЕЛАКСАЦИИ** . . . . . стр. 195—201

Измерена зависимость ширины рамановских линий от температуры для CCl_4, $SiCl_4$ и $TiCl_4$. Времена ориентационной релаксации, вычисленные на основании ширины составляющих изотопных линий $\nu_2(E)$ по методу Ракова, снижаются по мере роста температуры и составляют при комнатной температуре около $1 \cdot 10^{-11}$ *сек.* Отношение времен ориентационной реалаксации измеренных и вычисленных равняется в среднем 0,38 для всех исследованных температур и для всех трех субстанций. Энергии активации для вязкого потока и для молекулярной ориентировки являются равными в пределах погрешности.

Констатировано, что ширину рамановской линии $\nu_2(E)$ для CCl_4 можно полностью объяснить хаотической ротацией, тогда как для $TiCl_4$ (а также, хотя и в меньшей степени, для $SiCl_4$) можно предполагать, что добавочным расширяющим фактором является воздействие dipol-dipol между деформированными молекулами.

TABLE DES MATIÈRES

Mathématique

1. A. Mąkowski, Partitions into Unequal Primes 125
2. В. Пономарев, Аксиомы счетности и непрерывные отображения 127
3. П. Александров, О метризации топологических пространств . 135
4. Z. Ciesielski, Some Properties of Schauder Basis of the Space $C_{\langle 0,1\rangle}$ 141
5. W. Ślebodziński, Sur les prolongements d'une connexion linéaire . 145
6. Z. Opial, Sur les solutions périodiques de l'équation différentielle: $x''+g(x)=p(t)$ 151
7. A. Goetz and C. Ryll-Nardzewski, On Bases of Abstract Algebras 157
8. W. Mlak, Integration of Differential Equations with Unbounded Operators in Abstract (L)-Spaces 163
9. J. W Jaworowski, An Application of the Method of Complex Functions to a Proof of Kakutani's Theorem 169
10. W. Zawadowski, A Theorem on Quasi-Ordered Division Algebras 173

Physique Expérimentale

11. J. Mikulski, S. Mrowec und T. Werber, Untersuchungen des Mechanismus der Schwefelung von Ag-Zn-Legierungen unter Verwendung des radioaktiven Isotopes ^{35}S 179
12. J. Mikulski, S. Mrowec, I. Stoński, und T. Werber, Über den Mechanismus der Schwefelung von Cu-Au-Legierungen 183
13. J. Grzywacz, A. Kawski, and Z. Polacki, On the Photoluminescence of Fluorescein in Methyl Polymethacrylate 187
14. M. Sokołowski and W. Szymanowski, Electrophotography on Macromolecular Substances 191
15. B. Moszyńska et K. Szczepaniak, L'influence de la température sur la largeur des raies Raman des quelques tetrachlorures et calcul des temps de la relaxation d'orientation 195

Cena zł 20.